This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

LES

ÉCOLES NORMALES.

LIVRE NATIONAL.

SÉANCES

DES ÉCOLES NORMALES,

RECUEILLIES

PAR DES STÉNOGRAPHES,

ET REVUES

PAR LES PROFESSEURS.

NOUVELLE ÉDITION.

LEÇONS.

TOME DIXIÈME.

PARIS,

A L'IMPRIMERIE DU CERCLE-SOCIAL.

(1801.)

AN 9 DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

SÉANCES

DES ÉCOLES NORMALES,

RECUEILLIES

PAR DES STÉNOGRAPHES,

ET REVUES

PAR LES PROFESSEURS.

NOUVELLES LEÇONS.

(EN CONTINUATION)

MATHÉMATIQUES.

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS

Par J. L. LAGRANGE.

Les leçons suivantes offrent un cours d'analise sur cette partie du calcul qu'on nomme communément infinitésimale, ou transcendante, et qui n'est proprement que le calcul des fonctions. Ces leçons ont été données à l'école Politechnique pendant l'an VII, excepté la dernière qu'on a cru devoir ajouter ici pour compléter ce Cours. Elles étaient destinées à

servir de commentaire et de supplément à la première partie de la *Théorie des fonctions analitiques*.

Ceux qui ont étudié le calcul différentiel pourront se former dans ces leçons des notions simples et exactes de ce calcul. Ils y trouveront aussi des formules et des methodes nouvelles, ou qui n'avaient pas encore été présentées avec toute la clarté et la généralité qu'on pouvait désirer. C'est par ces motifs qu'on a cru pouvoir les publier dans le recueil des leçons de l'Ecole Normale.

LEÇON PREMIÈRE.

Sur l'objet du calcul des fonctions, et sur les fonctions en général.

Le calcul des fonctions a le même objet que le calcul différentiel, pris dans le sens le plus étendu; mais il n'est point sujet aux difficultés qui se rencontrent dans les principes et dans la marche ordinaire de ce calcul : il sert de plus à lier le calcul différentiel immédiatement à l'algèbre, dont on peut dire qu'il a fait jusqu'à présent une science séparée.

On connaît les difficultés qu'offre la supposition des infiniment petits, sur laquelle Leibnitz a fondé le calcul différentiel. Pour les éviter, Euler regarde les différentielles comme nulles, ce qui réduit leur rapport à l'expression vague et inintelligible de zéro divisé par zéro.

Maclaurin et d'Alembert emploient la considération des limites et regardent le rapport des différentielles comme la limite du rapport des différences finies, lorsque ces différences deviennent nulles.

Cette manière de représenter les quantités différentielles ne fait que reculer la difficulté ; car, en dernière analise, le rapport des différences évanouissantes se réduit encore à celui de zero à zero.

D'ailleurs on peut observer que c'est improprement qu'on applique le mot connu de limite à ce que devient une expression analitique, lorsqu'on y

fait évanouir certaines quantités, parce que ces quantités, après avoir décru jusqu'à zero, pourraient encore devenir négatives. De même qu'en géométrie on ne peut pas dire à la rigueur que la soutangente soit la limite des sousecantes, parce que rien n'empêche la sousecante de croître encore, lorsqu'elle est devenue tangente.

Les véritables limites, suivant les notions des anciens, sont des quantités qu'on ne peut passer, quoiqu'on puisse s'en approcher aussi près que l'on veut; telle est, par exemple, la circonférence du cercle à l'égard des poligones inscrits et circonscrits, parce que, quelque grand que devienne le nombre des côtés, jamais le poligone intérieur ne sortira du cercle, ni l'extérieur n'y entrera. Ainsi les assimptotes sont de véritables limites des courbes auxquelles elles appartiennent, etc.

Au reste je ne disconviens pas qu'on ne puisse, par la considération des limites, envisagées d'une manière particulière, démontrer rigoureusement les principes du calcul différentiel, comme Maclaurin, d'Alembert, et plusieurs autres auteurs après eux, l'on fait. Mais l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer, est si non contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autres métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul.

A l'égard de la méthode des fluxions, il est vrai qu'on peut ne considérer les fluxions que comme les vîtesses avec lesquelles les grandeurs varient, et y

faire abstraction de toute idée mécanique; mais la détermination analytique de ces vîtesses dépend aussi, dans cette méthode, de la considération des quantités infiniment petites ou évanouissantes; elle est par conséquent sujette aux mêmes difficultés que le calcul différentiel.

Quand on approfondit ces différentes méthodes ou plutôt ces différentes manières d'envisager la même méthode, on trouve qu'elles n'ont d'autre but que de donner le moyen d'obtenir séparément les premiers termes du développement d'une fonction, en les détachant et les isolant, pour ainsi dire, du reste de la série, parce que tous les problêmes dont la solution exige le calcul différentiel, dépendent, uniquement, de ces premiers termes. Et on peut dire qu'on remplissait cet objet sans presque se douter que ce fût là le seul but des opérations du calcul qu'on employait.

La considération des courbes avait fait naître la méthode des infiniment petits, qu'on a ensuite transformée en méthode des évanouissans ou des limites, et la considération du mouvement avait fait naître celle des fluxions. On a transporté dans l'analyse les principes qui résultaient de ces considérations; et on n'a pas vu d'abord, ou du moins il ne paraît pas qu'on ait vu que les problêmes qui dépendent de ces méthodes, envisagés analytiquement, se réduisent simplement à la recherche des fonctions dérivées qui forment les premiers termes du développement des fonctions données, ou à la recherche inverse des fonctions primitives par les fonctions dérivées.

Newton avait bien remarqué dans sa première solution du problême sur la courbe décrite par un corps grave, dans un milieu résistant, que ce problême devait se résoudre par les premiers termes de la série de l'ordonnée ; mais il se trompa dans l'application de ce principe, et dans sa seconde solution il employa purement la méthode différentielle, en considérant les différences de quatre ordonnées successives ; et quoiqu'il ait laissé subsister le passage où il dit que le problême se résoudra par les premiers termes de la série, on voit que ce passage n'a plus de rapport immédiat à ce qui précède ni à ce qui suit.

Il est donc plus naturel et plus simple de considérer immédiatement le développement des fonctions, sans employer le circuit métaphysique des infiniment petits ou des limites ; et c'est ramener le calcul différentiel à une origine purement algébrique que de le faire dépendre uniquement de ce développement.

Mais à la naissance du calcul différentiel, on n'avait pas encore une idée assez étendue de ce qu'on entend par fonction.

Les premiers analistes n'avaient employé ce mot, que pour désigner les différentes puissances d'une même quantité ; on en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité ; et il est aujourd'hui généralement adopté pour exprimer que la valeur d'une quantité dépend, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs autres quantités données.

Sous ce point de vue on doit regarder l'algèbre

comme la science des fonctions, et il est aisé de voir que la résolution des équations ne consiste en général qu'à trouver les valeurs des quantités inconnues en fonctions déterminées des quantités connues. Ces fonctions représentent alors les différentes opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat du calcul.

Mais en algèbre on ne considere les fonctions, qu'autant qu'elles résultent des opérations de l'arithmétique, généralisées et transportées aux lettres, au lieu que dans le calcul des fonctions, proprement dit, on considère les fonctions qui résultent de l'opération algébrique du développement en série lorsqu'on attribue à une ou à plusieurs quantités de la fonction, des accroissemens indéterminés.

Le développement des fonctions, envisagé d'une manière générale, donne naissance aux fonctions dérivées de différens ordres; et l'algorithme de ces fonctions une fois trouvé, on peut les considérer en elles-mêmes et indépendamment des séries d'où elles résultent. Ainsi une fonction donnée étant regardée comme primitive, on en peut déduire par des règles simples et uniformes d'autres fonctions que j'appelle dérivées; et lorsqu'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux équations dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. Ces transformations répondent aux différentiations et aux intégrations; mais dans la théorie des fonctions elles ne dépendent que d'opérations purement algébriques, fondées sur les simples principes du calcul.

Les fonctions dérivées se présentent naturellement dans la géométrie, lorsqu'on considère les aires, les tangentes, les rayons osculateurs, etc; et dans la mécanique, lorsqu'on considère les vîtesses et les forces. Si on regarde par exemple l'aire d'une courbe comme fonction de l'abscisse, l'ordonnée en est la premiere fonction dérivée, ou fonction prime; le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente, est exprimé par la fonction prime de l'ordonnée, et par conséquent par la seconde fonction dérivée ou fonction seconde de l'aire; le rayon osculateur dépend des deux premières fonctions dérivées de l'ordonnée, et ainsi de suite. De même en regardant l'espace parcouru comme fonction du tems, la vîtesse en est la fonction prime et la force accélératrice en est la fonction seconde. Ce n'est peut-être pas un des moindres avantages du calcul des fonctions de fournir pour ces élémens de la géométrie des courbes et de la mécanique, des expressions aussi simples et intelligibles que le sont les expressions algébriques des puissances et des racines.

Lorsqu'on envisage une fonction relativement à une des quantités qui la composent, on fait abstraction de la valeur de cette quantité, et on ne considère que la manière dont elle entre dans la fonction, c'est-à-dire, dont elle est combinée avec elle-même et avec les autres quantités. Ainsi la fonction est censée demeurer la même, tandis que cette quantité varie d'une manière quelconque, pourvu que les autres quantités avec lesquelles elle est mêlée, demeurent constantes. Ce qui introduit naturellement, par rapport aux fonctions, la distinction des quantités en variables et constantes.

Dans l'algèbre ordinaire on distingue simplement

les quantités en connues et inconnues, et on a coutume de désigner les unes par les premières lettres de l'alphabeth, et les autres par les dernières. L'application de l'algèbre à la théorie des courbes a fait d'abord distinguer les quantités qui entrent dans l'équation d'une courbe en données telles que les axes, les paramètres, etc, et en indéterminées telles que les coordonnées. Depuis on a envisagé ces mêmes quantités sous l'aspect plus naturel de constantes et de variables ; et la considération des fonctions porte naturellement à regarder sous ce même point de vue les différentes quantités qui les composent.

Nous appellerons donc simplement fonction d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entreront d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.

Nous désignerons ordinairement les variables des fonctions par les dernières lettres de l'alphabet x, y, *etc*, et les constantes par les premières a, b, c, *etc*. Et pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre caractéristique f ou F ; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée de cette variable ; comme x^2 ou $a + bx$ *etc*, on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x,

$f(x^2)$, $f(a+bx)$, *etc*, désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, *etc*.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres. Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques, nous aurons soin d'en avertir.

Si deux fonctions de deux variables différentes x, y, c'est-à-dire, l'une d'x, et l'autre d'y, sont composées de la même manière et avec les mêmes constantes, ces fonctions seront pareilles et pourront être désignées dans un même calcul par la même caractéristique; ainsi fx et fy seront deux fonctions pareilles qui deviendront identiques en faisant $y = x$. Mais si les deux fonctions étant composées de la même manière, les constantes qu'elles contiennent sont différentes, alors on ne pourra plus, généralement parlant, les représenter par la même caractéristique dans le cours d'un même calcul. Cependant si les deux fonctions ne diffèrent par exemple, que par la valeur d'une constante, qui serait a dans l'une, et b dans l'autre, on pourra encore les désigner par la même caractéristique, en les représentant par $f(x, a)$, et $f(y, b)$, comme des fonctions pareilles de x, a, et de y, b. Ainsi dans ce cas les quantités a et b entreront aussi dans l'expression de la fonction, parce que quoique constantes dans chaque fonction, elles peuvent être regardées comme variables d'une fonction à l'autre.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur les différentes formes des fonctions ; mais nous allons considérer la dérivation des fonctions les unes des autres, dans laquelle consiste proprement le calcul des fonctions.

LEÇON SECONDE.

Sur le développement d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Loi générale de ce développement. Origine des fonctions dérivées. Différens ordres de ces fonctions. Leur notation.

Considérons une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on substitue $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx+ip+iq+ir+$, *etc* ; dans laquelle les quantités p, q, r, *etc*, coéfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions p, q, r, *etc*, dépendra uniquement de celle de la fonction donnée fx ; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles de l'algèbre ordinaire en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

Cette dérivation des fonctions est une opération d'algèbre plus générale que l'élévation aux puissances et l'extraction des racines ; et les principaux problêmes d'analyse, de géométrie et de mécanique en dépendent, comme on l'a montré dans la *Théorie des Fonctions analitiques*.

Mais

Mais, pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série, qui doit résulter du développement de toute fonction fx, lorsqu'on y substitue $x+i$ au lieu de x, et que nous supposons ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i. Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne que je sache, n'avait cherché à la démontrer *à priori* ; ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire qu'il y a des cas particuliers où elle peut ne pas avoir lieu.

Je vais d'abord démontrer que, dans la série qui résulte du développement d'une fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières.

En effet il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction même fx, et il est clair en même tems que la substitution de $x+i$ au lieu de x ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux, ni en changer la nature tant que x et i seront des quantités indéterminées. D'un autre côté on sait par la théorie des équations que tout radical a autant de valeurs différentes ni plus ni moins qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc, si le développement de la fonction $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $a i^{\frac{m}{n}}$ la fonction fx serait nécessairement

irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série $fx+pi+qi^2+etc.+ui^{\frac{m}{n}}+$, etc, chaque valeur de fx se combinerait avec chacune des valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée; ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminés. Elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans fx, qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$. Nous examinerons à part ces sortes de cas et les conséquences qui en résultent.

Nous venons de voir que le développement de la fonction $f(x+i)$, ne saurait contenir en général des puissances fractionaires de i, il est facile de voir aussi qu'il ne pourra contenir non plus des puissances négatives de i.

Car, si parmi les termes de ce développement, il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant au nombre entier positif, en faisant $i=o$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie, lorsque $i=o$; par conséquent il faudrait que fx devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

Nous sommes donc assurés que, fx exprimant une fonction quelconque de x, la fonction $f(x+i)$ peut, généralement parlant, se développer en une série de cette forme,

$$fx + ip + i^2 q + i^3 r + i^4 s + etc,$$

dans laquelle p, q, r, *etc*, seront de nouvelles fonctions de x dérivées de la fonction primitive fx.

Quoique la forme de ces fonctions dérivées dépende essentiellement de celle de la fonction primitive, il règne néanmoins entr'elles une loi générale que nous allons exposer.

Supposons que l'indéterminée x soit changée en $x + o$, o étant une quantité quelconque indéterminée, et indépendante de i, il est visible que la fonction $f(x + i)$ deviendra $f(x + i + o)$; et l'on voit en même tems que l'on aurait le même résultat si on mettait, dans $f(x + i)$, $i + o$ à la place de i. Donc aussi le résultat sera le même, soit qu'on substitue $i + o$ à la place de i, ou $x + o$ à la place de x dans la série $fx + ip + i^2 q + i^3 r +$ etc, qu'on suppose égale à la fonction $f(x + i)$.

La substitution de $i + o$ au lieu de i dans cette série donnera,

$$Fx + (i + o)p + (i + o)^2 q + (i + o)^3 r + \text{etc};$$

Savoir, en développant les puissances de $i + o$ et n'écrivant pour abréger que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison

de ces termes suffit pour notre objet,

$$fx + ip + i^2 q + i^3 r + i^4 s + \text{etc} ;$$
$$+ op + 2 i o q + 3 i^2 o r + 4 i^3 o s + \text{etc.}$$

Pour faire maintenant la substitution de $x + o$ au lieu de x dans la même série, nous observons que puisque la fonction fx devient $fx + ip + \text{etc}$; lorsqu'on y change x en $x + i$, elle deviendra $fx + op + \text{etc}$, en y changeant x en $x + o$. De même si $p + i p' + \text{etc.}$ $q + i q' + \text{etc}$, $r + i r' + \text{etc.}$ sont ce que deviennent les fonctions p, q, r etc, lorsqu'on y substitue $x + i$ au lieu de x et qu'on les développe suivant les puissances de i, on aura, en changeant i en o, $p + op' + \text{etc.}$ $q + o q' + \text{etc.}$ $r + o r' + \text{etc}$, etc, pour les développemens des mêmes fonctions après la substitution de $x + o$ au lieu de x.

Donc par cette substitution la série $fx + ip + i^2 q + \text{etc}$, deviendra, en omettant les termes qui contiendraient le carré et les puissances plus hautes de o,

$$fx + ip + i^2 q + i^3 r + i^4 s + \text{etc},$$
$$+ op + iop' + i^2 oq' + i^3 or' + \text{etc},$$
$$\text{etc.}$$

Ce résultat doit être identique avec le précédent, indépendamment des valeurs de i et de o qui peuvent être quelconques ; il faudra donc que les termes affectés des mêmes puissances et produits de i et o soient identiques en particulier. Ainsi on aura les équations identiques $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, etc ; d'où l'on tire $q = \frac{1}{2} p'$, $r = \frac{1}{3} q'$, $s = \frac{1}{4} r'$ etc.

Dénotons en général par $f' x$ la fonction p dérivée de la fonction fx, en mettant un accent à la caractéristique f, pour indiquer la dérivation de la fonction. Dénotons de même par $f'' x$ la fonction dérivée de la fonction $f' x$, en ajoutant un accent à la caractéristique f' de la fonction $f' x$ d'où elle est dérivée.

Dénotons pareillement par $f''' x$ la fonction dérivée de $f'' ix$ et ainsi de suite.

Ces fonctions $f' x$, $f'' x$, $f''' x$ etc, ne seront autre chose que les coéfficiens de i dans les premiers termes des développemens des fonctions $f(x+i)$, $f'(x+i)$, $f''(x+i)$ etc.

On aura ainsi $p = f' x$, et comme p' est la fonction dérivée de p, on aura $p' = f'' x$, et par conséquent $q = \frac{1}{2} f'' x$. Ensuite q' étant la fonction dérivée de q, on aura $q' = \frac{1}{2} f''' x$, et par conséquent $r = \frac{1}{2 \cdot 3} f''' x$; et ainsi de suite.

Donc substituant ces expressions dans la série $fx + ip + i^2 q + i^3 r +$ etc, qui est le développement de $f(x+i)$, on aura cette formule fondamentale,

$$f(x+i) = fx + if' x + \frac{i^2}{2} f'' + \frac{i^3}{2 \cdot 3} f''' x$$

$$+ \frac{i^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} f^{iv} x + \text{etc},$$

Cette expression du développement de $f(x+i)$ a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et sur-tout

comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

Nous appelerons la fonction fx *fonction primitive* par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$ etc, qui en dérivent; et nous appelerons celles-ci *fonctions dérivées* par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la fonction dérivée $f'x$, *première fonction dérivée* ou *fonction dérivée du premier ordre* ou simplement *fonction prime*; la fonction $f''x$ dérivée de celle-ci, *seconde fonction dérivée*, ou *fonction dérivée du second ordre* ou simplement *fonction seconde*; la fonction $f'''x$ dérivée de la précédente, *troisième fonction dérivée*, ou *fonction dérivée du troisième ordre* ou simplement fonction *tierce* et ainsi de suite.

Mais nous entendrons toujours par *fonction dérivée* simplement, la première fonction dérivée, et par *fonction primitive* celle d'où elle est censée dérivée. Nous leur donnerons aussi quelquefois pour plus de simplicité le simple nom de *dérivées*, ou de *primitives*.

Si la fonction primitive n'est pas représentée par la caractéristique f, mais par une autre variable, comme lorsqu'on suppose y fonction de x donnée par une équation quelconque entre x et y, alors on pourra dénoter de même ses fonctions dérivées par des accens ou traits appliqués à la lettre y, et les appeller simplement *y prime*, *seconde*, *tierce*, etc.

Ainsi y étant regardée comme une fonction quelconque de x, ses fonctions dérivées seront représentées par y', y'', y''' etc : ; de sorte que y étant la fonction primitive, y' sera sa fonction dérivée du premier ordre, ou fonction prime, y'' sera la fonction dérivée du second ordre ou fonction seconde etc ; et on les nommera y *prime*, y *seconde*, etc.

De cette manière x devenant $x+i$ la valeur de y deviendra

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \frac{i^3}{2\cdot 3}y''' + \text{etc.}$$

En général si on a une expression quelconque en x, y etc, on pourra désigner ses fonctions dérivées par des traits appliqués à la même expression renfermée entre deux parenthèses. Ainsi

$$\left(\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy}\right)'$$

représentera la première fonction dérivée de l'expression

$$\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy},$$

et

$$\left(\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy}\right)''$$

représentera la seconde fonction dérivée de la même expression ; et ainsi de suite.

Et si l'on a une fonction de plusieurs variables x, y, etc, exprimée en général par $f(x, y\ldots)$,

on dénotera ses fonctions dérivées relatives à toutes ces variables, en appliquant un, deux γ etc, traits à la caractéristique f; ainsi $f'(x, y \ldots)$ dénotera sa fonction prime $f''(x, y \ldots)$ sa fonction seconde etc.

Quoique les fonctions dérivées doivent leur origine au développement de la fonction primitive lorsqu'on augmente la variable d'une quantité quelconque i, on voit qu'elles sont indépendantes de cette même quantité qui ne sert pour ainsi dire que comme un outil pour former ces fonctions. Ainsi dès qu'on aura trouvé par la considération du premier terme du développement, des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, on pourra faire abstraction de tout développement et regarder la dérivation des fonctions comme une nouvelle opération d'algébre plus générale et d'une beaucoup plus grande étendue que l'élevation aux puissances.

Ceux qui savent le calcul différentiel n'auront pas de peine à se convaincre que les fonctions dérivées $f'x$, $f''x$ etc. y', y'' etc, reviennent aux quantités qu'on désigne dans ce calcul par

$$\frac{d.fx}{dx}, \quad \frac{d^2.fx}{dx^2}, \text{ etc. } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.}$$

et ainsi des autres expressions semblables.

LEÇON

LEÇON TROISIÈME.

Fonctions dérivées des puissances. Développement d'une puissance quelconque d'un binome.

Puisque toute fonction dérivée du premier ordre $f'x$, n'est autre chose que le coëfficient de i dans le développement de la fonction primitive fx, après la substitution de $x+i$ à la place de x, il s'ensuit que la recherche de la fonction dérivée d'une puissance quelconque x^m se réduit à trouver le terme affecté de i dans le développement de la puissance $(x+i)^m$ suivant les puissances de i.

Lorsque l'exposant m est un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on démontre facilement par les premières opérations de l'algèbre, que les deux premiers termes de la puissance m du binome $x+i$, sont $x^m + m x^{m-1} i$; ainsi lorsque $fx = x^m$, ou $= Ax^m$, A étant un coëfficient constant quelconque, on aura

$$f'x = mAx^{m-1},$$

m étant un nombre quelconque rationel.

Comme tout nombre irrationnel peut être renfermé entre des limites rationnelles aussi resserrées que l'on veut, on en pourrait conclure tout de suite la vérité du résultat précédent pour une valeur quelconque irrationnelle de m, puisqu'on peut, en resserrant les limites, diminuer l'erreur à volonté. Mais comme il

est plutôt question ici de la forme même de la fonction dérivée, que de sa valeur absolue dans chaque cas particulier, nous croyons, pour ne rien laisser à désirer sur cette proposition fondamentale, devoir en donner une démonstration aussi générale que rigoureuse.

Puisque $(x+i)^m = x^m\left(1+\frac{i}{x}\right)^m$

par les règles de l'algèbre, si on fait pour abréger $\frac{i}{x} = \omega$, il s'agira de trouver le coëficient de ω dans le développement de $(1+\omega)^m$ quel que soit l'exposant m. Or quel que puisse être ce coëfficient, comme il doit être indépendant de ω, il est clair qu'il ne peut être qu'une fonction de m, puisque l'expression $(1+\omega)^m$ ne contient que les deux indéterminées ω et m. On pourra donc le représenter en général par Fm, la caractéristique F désignant une fonction déterminée mais inconnue. Ainsi comme en faisant ω nul, la quantité $(1+\omega)^m$ devient $1^m = 1$, on aura

$$(1+\omega)^m = 1 + \omega\, Fm + \text{etc.}$$

On aura donc aussi pour un autre exposant quelconque n

$$(1+\omega)^n = 1 + \omega\, Fn + etc.$$

Multipliant ensemble ces deux équations on aura

$$(1+\omega)^{m+n} = 1 + \omega\,(Fm + Fn) + etc.$$

Car la théorie des puissances repose uniquement sur ces principes que $a^m \times a^n = a^{m+n}$, quelles que

soient les quantités a, m, n, et on peut même dire que c'est dans ce principe que consiste l'essence des puissances ; lorsque les exposans ne peuvent être exprimés par des nombres.

Ainsi $Fm + Fn$ sera le coéfficient de ω dans le développement de la puissance $(1+\omega)^{m+n}$ Mais ce coéfficient doit être représenté par $F(m+n)$, puisque la fonction $(1+\omega)^m$ devient $(1+\omega)^{m+n}$, en y substituant $m+n$ pour m. Donc il faudra que la fonction désignée par la caractéristique F soit telle que l'on ait

$$F(m+n) = Fm + Fn,$$

m et n étant des quantités quelconques.

Pour trouver d'une manière générale la forme de la fonction d'après cette condition, je supposerai que la quantité m soit changée en $m+i$, et que la quantité n le soit en $m-i$, i étant quelconque ; alors la fonction $F(m+n)$ demeurera la même, et les fonctions Fm, Fn deviendront

$$F(m+i), F(n-i);$$

donc l'équation précédente donnera

$$Fm + Fn = F(m+i) + F(n-i).$$

Or par le développement, la fonction

$$F(m+i)$$

devient

$$Fm + iF'm + \frac{i^2}{2}F''m + \text{etc},$$

comme on l'a vu plus haut ; et la fonction $F(x-i)$ deviendra de même en prenant i négativement,

$$F n - i F' n + \frac{i^2}{2} F'' n - \text{etc},$$

donc l'équation précédente se réduira à celle-ci :

$$i(F m - F n) + \frac{i^2}{2}(F'' m + F'' n) + \text{etc.} = 0$$

laquelle devant avoir lieu quelle que soit la valeur de i, on aura nécessairement

$$F' m - F' n = 0, \quad F'' m + F'' n = 0 \text{ etc.}$$

La première de ces conditions donne

$$F' m = F' n,$$

d'où l'on conclud d'abord que la valeur de la fonction $F' m$ doit-être indépendante de la variable m, puisqu'elle demeure la même en changeant la valeur de cette variable ; et qu'ainsi cette valeur doit-être constante relativement à la même variable,

On aura donc

$$F' m = a,$$

a étant une constante ; et cette valeur de $F' m$ satisfera aussi aux autres conditions, puisqu'on aura

$$F'' m = 0, \quad F''' m = 0 \text{ etc} ;$$

et de même

$$F'' n = 0, \quad F'' n = 0 \text{ etc.}$$

Tout se réduit donc a trouver la valeur de la fonction primitive $F m$, d'après la fonction dérivée

$$F' m = a.$$

Or il est facile de voir que $F\,m$ ne peut être que de la forme $a\,m + b$, b étant une constante arbitraire ; car on peut se convaincre qu'il n'y a que cette expression qui puisse donner a pour sa fonction dérivée.

On peut dailleurs le démontrer directement ainsi, puisqu'on a en général

$$F\,(m+i) = F\,m + i\,F'\,m + \frac{i^2}{2}\,F''\,m + \text{etc.}$$

On aura dans le cas présent,

$$F'\,m = a,\ F''\,m = 0,\ F'''\,m = 0 \text{ etc ;}$$

$$F\,(m+i) = F\,m + a\,i,$$

et comme i peut être une quantité quelconque, si on fait $i = -m$, alors la quantité $m+i$ deviendra zéro ; donc la valeur de $F\,(m+i)$ sera indépendante de m ; elle sera par conséquent égale à une constante b. On aura ainsi

$$b = F\,m - a\,m,$$

d'où

$$F\,m = a\,m + b.$$

Substituant cette valeur de Fm, on aura en général

$$(1+\omega)^m = 1 + (am+b)\,\omega + \text{etc},$$

quelle que soit la valeur de m, a et b étant des constantes indépendantes de m, dont la valeur doit se déterminer par la considération de quelques cas particuliers.

Pour cela on fera d'abord $m = 0$, et l'on aura

$$1 = 1 + b\,\omega + \text{etc ;}$$

donc $b = o$. On fera ensuite $m = 1$, et l'on aura

$$1 + \omega = 1 + a\omega + \text{etc} ; \text{ donc } a = 1.$$

D'où l'on conclura enfin

$$(1 + \omega)^m = 1 + m\omega + \text{etc.}$$

Donc puisque

$$(x + i)^m = x^m (1 + \omega)^m ,$$

ω étant $= \frac{i}{x}$, on aura

$$A(x + i)^m = A x^m + A m x^{m-1} i + \text{etc} ,$$

quel que soit le nombre m, de sorte que la fonction dérivée de $A x^m$ sera en général $A m x^{m-1}$ comme nous l'avons trouvée d'abord pour le cas de m rationel.

La démonstration précédente ne laisse rien à désirer pour la rigueur et la généralité. Elle ne dépend que des fonctions dérivées de la forme la plus simple, et fournit, dès le commencement un exemple remarquable de leur usage dans l'analise.

On peut donc établir pour règle générale, que *la fonction dérivée d'une puissance quelconque, d'une variable est égale à la puissance d'un degré moindre d'une unité de la même variable multipliée par l'exposant de la puissance donnée.*

De là et de la loi du développement des fonctions résulte une démonstration aussi simple que générale, et peut être la seule rigoureuse qu'on ait encore donnée de la formule du binome pour un exposant quelconque.

En effet puisqu'on vient de trouver que

$$Fx = Ax^m$$

donne

$$F'x = mAx^{m-1},$$

on aura de même en prenant la fonction dérivée de cette dernière quantité

$$F''x = m(m-1)Ax^{m-2},$$

et par la même raison on aura, en prenant de nouveau la fonction dérivée,

$$F'''x = m(m-1)(m-2)Ax^{m-3}$$

et ainsi de suite.

Donc puisqu'on a trouvé en général

$$F(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}fx + \text{etc.}$$

On aura pour le cas de $fx = x^m$, la série

$$(x+i)^m = x^m + mx^{m-1}i + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}i^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^{m-3}i^3 + \text{etc.}$$

Si on divise toute l'équation par x^m et qu'on mette ensuite i à la place de $\frac{i}{x}$, on aura

$$(1+i)^m = 1 + mi + \frac{m(m-1)}{2}i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}i^3 + \text{etc}$$

Cette formule résulte de la précédente en y faisant $x = 1$; mais il n'aurait pas été assez rigoureux de l'en déduire de cette manière, puisqu'on a déjà

remarqué que le développement de la fonction $f(x+i)$ en puissances entières de i peut cesser d'être exact dans des cas particuliers de la valeur de x.

Si maintenant on multiplie l'équation précédente par a^m, et qu'on y substitue ensuite b à la place de ai, on aura

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2 + \text{etc.}$$

quelques valeurs qu'on attribue aux quantités a, b, m.

La méthode que nous avons employée plus haut pour trouver directement la fonction primitive d'une quantité constante, peut-être appliquée à d'autres cas. En effet si dans la formule générale

$$f(x+i) = fx + i\,f'x + \frac{i^2}{2}f''x + \text{etc.}$$

on fait

$$i = -x,$$

la fonction $f(x+i)$ deviendra indépendante de x, et sera par conséquent égale à une constante b, laquelle sera proprement la valeur de fx lorsque $x = o$. On aura donc ainsi

$$b = fx - xf'x + \frac{x^2}{2}f''x - \text{etc.}$$

d'où l'on tire

$$fx = b + xf'x - \frac{x^2}{2}f''x + \text{etc.}$$

etc.

Si maintenant $f'x = a$, on aura

$$f''x = 0, f'''x = 0 \text{ etc},$$

donc $$fx = b + ax.$$

Si $f'x = ax$, on aura

$$f''x = a, f'''x = 0, f^{IV}x = 0 \text{ etc},$$

donc

$$fx = b + ax^2 - \frac{ax^2}{2} = b + \frac{ax^2}{2}.$$

Si $f'x = ax^2$, on aura

$$f''x = 2ax, f'''x = 2a, f^{IV}x = 0, f^{V}x = 0 \text{ etc};$$

donc

$$fx = b + ax^3 - ax^3 + \frac{ax^3}{3} = b + \frac{ax^3}{3}$$

et ainsi de suite.

En général si $f'x = ax^n$, on aura, en prenant les fonctions dérivées,

$$f''x = nax^{n-1}, f'''x = an(n-1)ax^{n-2}, \text{ etc};$$

donc substituant ces valeurs

$$fx = b + ax^{n+1}\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4} - \text{etc}\right)$$

Or, on a par le développement

$$(1-1)^{n+1} = 1 - (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} - \frac{(n+1)n(n-1)}{2.3} + \text{etc.} = 0$$

donc

$$(n+1)\left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2.3} - \text{etc},\right) = 1,$$

et par conséquent

$$1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} + \text{etc.} = \frac{1}{n+1}$$

quel que soit le nombre n ; donc on aura

$$fx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + b.$$

En effet, la fonction dérivée de cette quantité sera, par la règle générale,

$$\frac{a(n+1)x^n}{n+1} = a\,x^n,$$

la constante b ayant zéro pour fonction dérivée.

LEÇON QUATRIÈME.

Fonctions dérivées des quantités exponentielles et logarithmiques. Développement de ces quantités en séries.

La fonction x^m dans laquelle x est la variable et m est une constante, conduit naturellement à la considération de la fonction a^x, dans laquelle la variable est x, et où a est une constante. Ces sortes de quantités s'appellent exponentielles, parce qu'elles ne varient qu'à raison de l'exposant.

Pour trouver la fonction dérivée de a^x, il n'y aura, suivant le principe général, qu'à substituer $x+i$ à la place de x, et développer suivant les puissances de i; le coëfficient du terme affecté de i sera la fonction cherchée.

Cette substitution donne la fonction $a^{x+i}=a^x \times a^i$,

Supposons $a = 1+b$, on aura $a^i=(1+b)^i$,

et par la formule générale, démontrée précédemment, on aura

$$a^i=(1+b)^i=1+ib+\frac{i(i-1)}{2}b^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{2\cdot 3}b^3+\text{etc.}$$

En ordonnant les termes de cette série suivant les puissances de i, il est facile de voir que les deux premiers termes du développement de a^i seront

$$1+\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.}\right)i$$

Soit pour abréger

$$c = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc},$$

$$= a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \text{etc} :$$

On aura donc $1 + c\,i$ pour les deux premiers termes du développement de a^i ; par conséquent, en multipliant par a^x, on aura $a^x + c\,a^x\,i$ pour les deux premiers termes du développement de a^{x+i}. Donc $c\,a^x$ coëficient de i sera la fonction dérivée de a^x.

Le coëfficient c dépend comme l'on voit de la quantité a qui est comme la base de l'exponentielle, et on nomme communément ce coëfficient le *module.*

On peut ainsi établir cette règle, *que la fonction dérivée d'une quantité exponentielle est égale à cette exponentielle multipliée par un coëficient constant qui dépend de la base de l'exponentielle et qu'on nomme le module.*

Puisque la dérivée de a^x est $c\,a^x$, la dérivée de celle-ci sera $c^2\,a^x$, et la dérivée de cette dernière sera de même $c^3\,a^x$, et ainsi de suite.

Ainsi en faisant $fx = a^x$ on aura

$$f'x = c\,a^x, f''x = c^2\,a^x, \text{ etc.}$$

Donc substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+i)$, on aura

$$a^{x+i} = a^x + c a^x i + \frac{c^2}{2} a^x i^2 + \frac{c^3}{2.3} a^x i^3 + etc,$$

et divisant par a^x,

$$a^i = 1 + ci + \frac{c^2 i^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} \frac{i^3}{} + \text{etc.}$$

C'est la série dont nous n'avions trouvé ci-dessus que les deux premiers termes. Elle peut servir, comme l'on voit, à réduire toute puissance en une série ordonnée suivant les puissances de son exposant.

On peut par cette série déterminer directement la valeur de a en c.

En faisant $i = 1$, on aura

$$a = 1 + c + \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{2.3} + etc.$$

Et lorsque $c = 1$, la valeur de a se trouvera exprimée par la série très-simple

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc},$$

dont la valeur est

2,718281828459....

C'est le nombre qu'on désigne ordinairement par e, et qui est par conséquent la base des exponentielles dont le module est l'unité.

Ainsi en faisant $fx = e^x$ on aura simplement $f'x = e^x$, $f''x = e^x$, *etc*; et l'on aura

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^4}{2.3.4} + etc.$$

$a^i = 1 + ci + \frac{c^2 i^2}{2} + etc$: , on fait $i = \frac{1}{c}$ on aura

$$a^{\frac{1}{c}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \text{etc} : = e.$$

Ainsi on a entre les trois constantes a, c et e la relation $a^{\frac{1}{c}} = e$, d'où l'on tire $a = e^c$.

Cette équation donne aussi $\frac{1}{a} = e^{-c}$; d'où l'on voit qu'en faisant e négatif, a se change en $\frac{1}{a}$; ainsi en faisant ces changemens dans l'équation

$$c = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - etc,$$

donnée ci-dessus, on aura

$$c = \frac{a-1}{a} + \frac{(a-1)^2}{2a^2} + \frac{(a-1)^3}{3a^3} + etc.$$

Cette série est plus propre que la précédente à donner la valeur de c, lorsque a est un nombre plus grand que l'unité.

En faisant $a = 10$, on a

$$c = 0,9 + \frac{(0,9)^2}{2} + \frac{(0,9)^3}{3} + etc;$$

et on trouvera par le calcul

$$c = 2,302585092994. \ldots .$$

On peut exprimer toute quantité variable par une constante élevée à une puissance variable ; alors

l'exposant de cette puissance devient une fonction de la même quantité, et cette fonction est dans le sens le plus général le logarithme de la quantité proposée. D'où l'on voit que les fonctions logarithmiques ne sont proprement que les réciproques des fonctions exponentielles.

Nous dénotons, en général, les logarithmes d'une quantité par les mots *log*, mis avant cette quantité en forme de caractéristique. Ainsi, *log.* x exprimera le logarithme ou la fonction logarithmique de x, et cette fonction sera donnée par l'équation $x = a^{\log. x}$, où a, base de l'exponentielle, sera en même tems la base du système logarithmique.

Pour trouver maintenant la fonction dérivée de *log.* x, on fera, en général, $fx = \log. x$, ce qui donnera $x = a^{fx}$, et mettant $x + i$ à la place de x, on aura

$$x + i = a^{f(x+i)},$$

équation qui doit être identique, et avoir lieu, par conséquent, quelle que soit la valeur de i. Or, par le développement on a

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.} = fx + \omega,$$

en faisant

$$\omega = if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc};$$

donc faisant cette substitution on aura

$$x + i = a^{fx+\omega} = a^{fx} \times a^{\omega} = xa^{\omega},$$

et divisant par x,

$$1 + \frac{1}{x} = a^{\omega}.$$

Or, par la formule trouvée ci-dessus, on a en général,

$$a^{\omega} = 1 + c\omega + \frac{c^2\omega^2}{2} + \text{etc:}$$

donc on aura

$$1 + \frac{i}{x} = 1 + c\omega + \frac{c^2\omega^2}{2} + \text{etc.}$$

Donc remettant pour ω sa valeur, et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on aura cette équation identique.

$$\frac{i}{x} = icf'x + \frac{i^2}{2}(c^2f'x^2 + cf''x) + \text{etc;}$$

et la comparaison des termes donnera d'abord

$$\frac{1}{x} = cf'x,$$

d'où l'on tire

$$f'x = \frac{1}{cx}$$

La comparaison des autres termes donnera les valeurs de $f''x$, $f'''x$ etc; mais il est plus simple de les déduire successivement de celle de $f'x$.

La constante c dépend de la base a du système logarithmique par les mêmes formules que nous avons trouvées plus haut; relativement aux logarithmes, elle s'appelle le module du système logarithmique.

De

De là résulte cette règle générale : *que la fonction dérivée du logarithme d'une variable est égale à l'unité divisée par cette variable multipliée par le module du système logarithmique.*

Puisque $fx = log\ x$ donne $f'x = \frac{1}{cx}$, en prenant successivement les fonctions dérivées, d'après la règle générale des puissances, on aura

$$f''x = -\frac{1}{cx^2},\ f'''x = \frac{2}{cx^3},\ etc;$$

donc, si on fait ces substitutions dans le développement de $f(x+i)$, on aura la série

$$log.\ x + \frac{i}{cx} - \frac{i^2}{2cx^2} + \frac{i^3}{3cx^3} - \text{etc},$$

pour la valeur de $log.\ (x+i)$.

Ayant ainsi le logarithme d'un nombre quelconque x, on peut par cette série trouver celui d'un autre nombre plus grand $x+i$, et la série sera d'autant plus convergente que la différence i des deux nombres aura un moindre rapport au nombre x.

Par la théorie des logarithmes, on a $log.\ (x+i) - log.\ x = log.\ \frac{x+i}{x} = log.\ \left(1 + \frac{i}{x}\right)$; donc si on fait dans la formule précédente $\frac{i}{x} = y$, on aura

$$Log.\ (1+y) = \frac{1}{c}\ \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \text{etc};\right)$$

formule connue.

Soit $1+y=z$, on aura $y = z-1$, donc

$$log.\ z = \frac{1}{c}\left(z - 1 - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - etc.\right)$$

Cette série n'est convergente et par conséquent ne peut servir à trouver le logarithme d'un nombre donné z, que lorsque ce nombre diffère peu de l'unité ; mais on peut la rendre convergente dans tous les cas, par la substitution de $\sqrt[r]{z}$ au lieu de z ; car puisque $log. \sqrt[r]{z}$ est égal à $\frac{log. z}{r}$, on aura en multipliant par r

$$log. z = \frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z} - 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[r]{z}-1)^2 + \frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^3 - \text{etc};\right)$$

où l'on peut prendre pour r un nombre quelconque positif ou négatif.

Or, quel que soit le nombre z, on peut toujours en extraire la racine d'un degré r, tel que $\sqrt[r]{z}$ soit un nombre aussi peu différent de l'unité qu'on voudra ; ainsi, la formule précédente donnera toujours la valeur de log. z, avec toute l'exactitude qu'on pourra désirer.

Si on prend r négativement, alors $\sqrt[r]{z}$ devient $\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$, et la série qui exprime log. z, devient, en changeant les signes,

$$log. z = \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3 + \text{etc}\right)$$

où tous les termes sont positifs. Ainsi on peut avoir à volonté pour la valeur de log. z, une série dont tous les termes soient positifs, ou alternativement positifs et négatifs. Car il est évident que z étant un nombre

plus grand que l'unité, $\sqrt[r]{z}$ sera plus grand que l'unité, et z étant moindre que l'unité $\sqrt[r]{z}$ sera aussi moindre que l'unité ; mais les différences seront d'autant plus petites, que l'exposant r de la racine sera un plus grand nombre ; donc $\sqrt[r]{z} - 1$ et $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ seront positifs dans le premier cas, et négatifs dans le second.

Si a est la base des logarithmes, en sorte que log. $a = 1$, on pourra par les mêmes formules déterminer aussi exactement qu'on voudra la valeur du module c ; car en faisant log. $a = 1$, on aura

$$c = r\left(\sqrt[r]{a} - 1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{a} - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{a} - 1)^3 - \text{etc}\right)$$

ou bien

$$c = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3 + \text{etc}\right)$$

Il est clair que les deux séries que nous venons de donner pour l'expression de log. z, seront nécessairement convergentes aussitôt qu'on aura extrait de z une racine r, telle que $\sqrt[r]{z} - 1$ sera une fraction moindre que l'unité ; car alors $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ sera une fraction plus petite encore, puisque

$$1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z} - 1.}{\sqrt[r]{z}}$$

Ainsi, puisque dans la première série les termes sont alternatifs, le second et le troisième, le quatrième et le cinquième, etc. formeront des sommes négatives ; de sorte que la première série donnera

$$log.\, z < \frac{r}{c}(\sqrt[r]{z} - 1)$$

Au contraire la seconde série ayant tous ses termes positifs donnera

$$log.\, z > \frac{r}{c}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Ainsi on a tout de suite deux limites pour la valeur de log z, qu'on peut ressérer autant que l'on veut en prenant r toujours plus grand.

On aura par la même raison, si $\sqrt[r]{a} < 2$,

$$c < r(\sqrt[r]{a} - 1) > r\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right).$$

Puisque $1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z} - 1}{\sqrt[r]{z}}$,

il est visible que la différence entre les deux limites de log. z sera

$$\frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z} - 1\right) \times \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$$

ainsi en prenant l'une ou l'autre des deux expressions précédentes de log. z, on est assuré que l'erreur en excès ou en défaut est nécessairement moindre que cette même quantité.

Ainsi on sera sûr d'avoir par ces expressions les

logarithmes exacts jusqu'à s chifres, en prenant la racine $\sqrt[r]{z}$, tel qu'il y ait après la virgule s zéros avant les chifres significatifs.

En général, puisque l'erreur va en diminuant à mesure que l'on prend l'exposant r de la racine plus grand, on peut dire qu'elle deviendra nulle ou comme nulle, si on prend r infiniment grand; de sorte qu'on pourra regarder alors l'une et l'autre des deux formules $\frac{r}{c}\left(\sqrt[r]{z}-1\right)$ et $\frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$ comme l'expression exacte de *log.* z.

On peut conclure de là que les logarithmes rentrent dans la classe des puissances, et forment le premier terme de la série des puissances dont les exposans croissent ou décroissent depuis zéro, ou le dernier terme des racines dont les degrés vont en augmentant à l'infini.

C'est aussi sous ce rapport qu'on peut dire qu'à un nombre donné il répond toujours une infinité de logarithmes, puisque sa racine infinitième a nécessairement une infinité de valeurs différentes.

La meilleure manière d'employer la formule précédente est de prendre pour r une puissance de 2, puisqu'on n'aura alors que des extractions de racines carrées à faire. C'est ainsi que Brigs a calculé les premiers logarithmes. Il avait remarqué qu'en faisant des extractions successives de racines carrées d'un nombre quelconque, si on s'arrête dans une de ces extractions à deux fois autant de décimales qu'il y

aura de zéro à la suite de l'unité lorsqu'il n'y a plus que l'unité avant la virgule, la partie décimale de cette racine se trouve exactement la moitié de celle de la racine précédente, en sorte que ces parties décimales ont entr'elles le même rapport que les logarithmes des racines mêmes ; c'est ce qui résulte évidemment de la formule précédente.

Ainsi en prenant $r = 2^{60}$, on trouve pour $a = 10$

$$\sqrt[r]{a} = 1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527..$$

$$\frac{1}{r} = 0,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354.$$

De sorte que l'on aura

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\sqrt[r]{a-1}} = \frac{867361737988403 54}{1997174208125505 27}$$

$$= 0,\ 43429\ 44819\ 03251.....$$

C'est de ce nombre qu'on a tiré celui qu'on a donné ci-dessus pour la valeur de c.

Si maintenant on veut avoir par exemple le logarithme de 3, on fera $z = 3$, et employant de même 60 extractions de racines carrées, on trouvera les nombres suivans :

$$\sqrt[r]{z} = 1,\ 00000\ 00000\ 00000\ 00093\ 28942\ 64074\ 58932...$$

et de la

$$\log z. = \frac{\sqrt[r]{z} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{952894264074589 32..}{199717420812550527...}$$

$$= 0,\ 47712\ 12547\ 19662....$$

Cette méthode est, comme l'on voit, très-laborieuse par le grand nombre d'extractions de racines qu'elle demande pour avoir un résultat en plusieurs décimales ; mais les séries que nous avons données ci-dessus, servent à la simplifier et à la compléter ; car quelque soit le nombre z, il suffira d'en extraire quelques racines carrées jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre $\sqrt[r]{z}$ qui n'ait que l'unité avant la virgule ; alors les puissances de $\sqrt[r]{z} - 1$ seront des fractions d'autant plus petites qu'elles seront plus hautes ; par conséquent il suffira toujours de prendre un certain nombre de termes de la série pour avoir les logarithmes exacts jusqu'à tel ordre de décimales qu'on voudra.

Les logarithmes qui ont l'unité pour module, sont ceux qui se nomment logarithmes naturels, ou hyperboliques, parce qu'ils représentent l'aire de l'hyperbole équilatère, rapportée aux abscisses prises dans un des assimptotes, et que Neper a le premier calculés. Leur base est le nombre e, et pour les distinguer des autres, nous les désignerons simplement par la caractéristique l.

Ainsi lx aura pour fonction dérivée $\frac{1}{x}$ et la formule générale $x = a^{\log. x}$ deviendra pour ces loga-

rithmes $x = e^{lx}$; de sorte qu'on aura en général $a^{log.x} = e^{lx}$; et comme on a trouvé plus haut $a = e^c$, on aura $e^{c\,log.x} = e^{lx}$; et par conséquent $l\,x = c\,log.\,x$. D'où l'on voit que les logarithmes d'un même nombre dans différens systêmes sont en raison inverse de leurs modules.

Au reste l'équation $a = e^c$ donne $c = l.\,a$; d'où il s'ensuit que le module c du systême logarithmique dont la base est a, n'est autre chose que le logarithme naturel de la même base. Ainsi on pourra par la suite substituer l'expression $l.\,a$ à la place de c dans les fonctions dérivées de a^x et de log. x.

De cette manière on aura $a^x\,l.\,a$ pour la dérivée de a^x, et $\frac{1}{x\,l.\,a}$ pour la dérivée de log. x.

Dans le systême des logarithmes des tables usuelles, la base a est supposée égale à 10 ; ainsi le module de ce systême sera $l.\,10$, dont la valeur est 2,3025850929 94..

Avant de terminer cette Leçon, je ne puis m'empêcher d'indiquer un usage très-simple de la formule,

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^4}{2.3.4} + \text{etc} ;$$

pour trouver le développement d'une puissance quelconque d'une quantité composée d'autant de termes que l'on voudra.

En effet si à la place de i on met $i(p + q + r + etc)$, on aura $e^{i(p+q+r+etc)} = 1 + i(p + q + r + \text{etc}, + \frac{i^2}{2}(p + q + r + \text{etc})^2 + \frac{i^3}{2.3}(p + q + r + \text{etc})^3 + \text{etc.}$

Ainsi

Ainsi le terme multiplié par i^m sera

$$\left(\frac{p+q+r+\text{etc}}{1.2.3....m}\right)^m$$

d'un autre côté on a

$$e^{i(p+q+r+etc)} = e^{ip} \times e^{iq} \times e^{ir} ....$$

$$= (1 + ip + \frac{i^2p^2}{2} + \frac{i^3p^3}{2.3} + \text{etc};)$$

$$\times (1 + iq + \frac{i^2q^2}{2} + \frac{i^3q^3}{2.3} + \text{etc};)$$

$$\times (1 + ir + \frac{i^2r^2}{2} + \frac{i^3r^3}{2.3} + \text{etc};)$$

$$\times .....$$

Donc le coéfficient de i^m dans le développement de ces différens produits multipliés par $1.2.3... m$ sera la valeur de $(p + q + r + etc,)^m$.

Or il est visible que ce coéfficient se trouvera composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{P^\lambda q^\mu r^\nu ...}{1.2.3...\lambda \times 1.2.3..\mu \times 1.2.3...\nu \times ...}$$

qu'on peut donner de valeurs différentes à λ, μ, ν, de sorte que l'on ait

$$\lambda + \mu + \nu + \text{etc}; = m,$$

en prenant pour λ, μ, ν etc, zéro un des nombres entiers positifs.

Ainsi la puissance $(p+q+r+\text{etc.})^m$ sera composée d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3.4....m\, p^{\lambda} q^{\mu} r^{\nu} ...}{1.2.3...\lambda \times 1.2.3..\mu \times 1.2.3..\nu \times ...}$$

ce qui s'accorde avec ce que donne la théorie des combinaisons.

LEÇON CINQUIÈME.

Fonctions dérivées des sinus et cosinus d'angles, et des angles par les sinus et cosinus. Développement de ces quantités en séries.

Les angles n'entrent dans l'analise que par le moyen de leurs sinus et cosinus qu'on dénote par les mots *sin* et *cos* placés comme caractéristiques avant les angles. On a ainsi les fonctions angulaires *sin x* et *cos x*, dont la propriété générale tirée de la nature du cercle est qu'en prenant deux angles quelconques x et y, on a

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Cela posé pour avoir les fonctions dérivées de *sin x* et *cos x*, il n'y aura qu'a mettre $x+i$ à la place de x et développer ensuite les fonctions

$$\sin(x+i) \text{ et } \cos(x+i),$$

suivant les puissances de i, les coéfficiens de i dans ces développemens seront les dérivées cherchées. Or par les formules précédentes on a

$$\sin(x+i) = \sin x \cos i + \cos x \sin i,$$
$$\cos(x+i) = \cos x \cos i - \sin x \sin i.$$

Ainsi tout se réduit à développer en série les quantités *sin i* et *cos i*.

J'observe que quelle que puisse être la série du dé-

veloppement de $\sin i$, elle ne saurait être que de la forme

$$A i + B i^2 + \text{etc} ;$$

car premièrement le sinus devant être nul lorsque l'angle est nul et ne pouvant avoir, par sa nature, qu'une valeur unique pour chaque angle, il s'ensuit que son expression développée ne peut contenir que des termes multipliés par des puissances positives et entières de i. En second lieu, il est visible que les coëfficiens A, B, etc. ne peuvent être que numériques, puisque dans l'expression $\sin i$ il n'entre que la seule quantité indéterminée i.

Faisant donc

$$\sin i = A i + B i^2 + \text{etc},$$

on aura

$$\cos i = \sqrt{(1 - \sin i^2)} =$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin i^2 + \text{etc}, = 1 - \frac{A^2}{2} i^2 + \text{etc} ;$$

Donc substituant ces valeurs et ordonnant suivant les puissances de i, on aura

$$\sin (x + i) = \sin x + i A \cos x$$

$$+ i^2 \left(B \cos x - \frac{A^2}{2} \sin x\right) + \text{etc.}$$

$$\cos (x + i) = \cos. x - i A \sin x$$

$$- i^2 \left(B \sin x + \frac{A^2}{2} \cos x\right) + \text{etc.}$$

Donc en n'ayant égard qu'aux termes multipliés par i, on en conclura que la fonction dérivée de

$\sin x$ est $A \cos x$, et que la fonction dérivée de $\cos x$ est $-A \sin x$.

Le coéfficient A est une constante encore inconnue, mais que nous déterminerons ci-après par la nature du cercle.

Connaissant ces premières fonctions dérivées, on pourra de la même manière trouver toutes les suivantes. Ainsi la première dérivée de $\sin x$ étant $A \cos x$, la dérivée de celle-ci sera $-A^2 \sin x$, et la troisième dérivée sera $-A^3 \cos x$ et ainsi de suite.

Donc en général si $fx = \sin x$ on aura

$$f'x = A \cos x, f''x = -A^2 \sin x, f'''x = -A^3 \cos x \text{ etc.}$$

Et faisant ces substitutions dans la série du développement de $f(x+i)$, on aura

$$\sin(x+i) = \sin x + Ai \cos x - \frac{A^2 i^2}{2} \sin x - \frac{A^3 i^3}{2.3} \cos x + \frac{A^4 i^4}{2.3.4} \sin x + \text{etc.}$$

On aura de même

$$fx = \cos x, f'x = -A \sin x, f''x = -A^2 \cos x$$
$$f'''x = A^3 \sin x, f''''x = A^4 \cos x \text{ etc.}$$

Et ces substitutions donneront

$$\cos(x+i) = \cos x - Ai \sin x - \frac{A^2 i^2}{2} \cos x$$

Si donc on prend l'angle i moindre qu'un droit et assez petit pour que Ai soit moindre que l'unité, on aura nécessairement

1°. $Sin\, i < Ai$ et $> \frac{i}{\sqrt{(1+i^2)}}$, par conséquent

$$Ai > \frac{i}{\sqrt{(1+i^2)}} \text{ et } A > \frac{1}{\sqrt{(1+i^2)}}$$

2°. $Sin\, i > Ai - \frac{A^3 i^3}{2.3}$ et $< i$, par conséquent

$Ai - \frac{A^3 i^3}{2.3} < i$, et $A - \frac{A^3 i^2}{2.3} < 1$, ou $A < 1 + \frac{A^3 i^2}{2.3}$.

Comme ces conditions doivent avoir lieu quelque petit que soit i, il resulte de la première que A ne peut pas être moindre que 1 ; car si $A < 1$, on aura $\frac{1}{A} > 1$; or la condition $A > \frac{1}{\sqrt{(1+i^2)}}$ donne $\frac{1}{A} < \sqrt{(1+i^2)}$; donc quelque peu que $\frac{1}{A}$ surpassât l'unité, il serait toujours possible de prendre i tel que $\sqrt{(1+i^2)}$ fût $< \frac{1}{A}$, tandis que cette quantité doit toujours être $> \frac{1}{A}$.

Il résulte ensuite de la seconde condition que A ne peut pas être plus grand que l'unité ; car quelque peu que A surpassât l'unité, il serait toujours possible de prendre i assez petit pour que l'on eut $1 + \frac{A^3 i^2}{2.3} < A$, tandis qu'on doit avoir toujours

$$1 + \frac{A^3 i^2}{2.3} > A.$$

Donc puisque la valeur de A ne peut être ni moindre, ni plus grande que l'unité, il s'ensuit qu'on aura nécessairement $A = 1$.

Donc *la fonction dérivée de sin x est simplement cos x et la fonction dérivée de cos x est — sin x*, x désignant un angle quelconque c'est-à-dire un arc dans le cercle dont le rayon est l'unité.

Ainsi on aura en général pour un angle quelconque i,

$$Sin\, i = i - \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

$$Cos\, i = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \frac{i^6}{2.3.4.5.6} + \text{etc,}$$

formules connues et dont la découverte est due à Newton.

Nous venons de considérer les sinus et les cosinus comme fonctions des angles. On peut réciproquement considérer les angles comme fonctions de leurs sinus ou cosinus, et en chercher les fonctions dérivées. On désigne communément ces fonctions par les mots *ang. sin.* ou *ang. cos.* placés avant le sinus ou cosinus, comme caractéristiques.

Soit $fx =$ ang. sin. x, on aura $\sin(fx) = x$, mettant $x + i$ pour x, et supposant $if'x + \frac{i^2}{2} f''x +$ etc. $= \omega$ on aura $\sin(fx + \omega) = x + i$, savoir $\sin(fx)\cos\omega + \cos(fx)\sin\omega = x + i$. Or $\sin(fx) = x$, et cos

$(fx) = \sqrt{(1 - sin(fx)^2)} = \sqrt{(1 - x^2)}$; de plus $sin\,\omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3} +$ etc; et $cos\,\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} +$ etc, par les formules trouvées plus haut; donc faisant ces substitutions et restituant la valeur de ω, on aura en ordonnnant les termes par rapport à i, l'équation identique

$$x + i = x + i\sqrt{(1 - x^2)}\, f'x + \frac{i^2}{2}(\sqrt{(1 - x^2)}\, f''x - x f'x^2) + \text{etc.}$$

Laquelle donne par la comparaison des premiers termes affectés de i $1 = \sqrt{(1 - x^2)}\, f'x$; d'où l'on tire

$$f'x = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

La comparaison des autres termes donnera les valeurs de $f''x$, $f'''x$ etc; mais il est plus simple de les déduire immédiatement de celle de $f'x$.

Soit maintenant $fx = ang.\,cos.\,x$, on aura $x = cos\,(fx)$, mettant $x + i$ pour x et $fx + \omega$ pour fx, on aura $x + i = cos\,(fx + \omega) = cos\,fx\,cos\,\omega - sin\,fx\,sin\,\omega$; or $cos\,(fx) = x$ et $sin\,(fx) = \sqrt{(1 - cos\,(fx)^2)} = \sqrt{(1 - x^2)}$; faisant ces substitutions, et mettant pour $sin\,\omega$ et $cos\,\omega$ leurs valeurs en séries $\omega - \frac{\omega^3}{2.3}$ etc, et $1 - \frac{\omega^2}{2} +$ etc, on aura, après avoir restitué la valeur de ω, et ordonné les termes suivant les puissances de i, cette équation identique

$$x + i = x - i\sqrt{(1 - x^2)}\, f'x$$

$$-\frac{i^2}{2}\left(\sqrt{(1-x^2)}f''x+\dot{x}f'\dot{x}^2\right)+\text{etc};$$

Et la comparaison des deux premiers termes affectés de i donnera $1=-\sqrt{(1-x^2)}f'x$, d'où l'on tire $f'x=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

Donc, puisque x étant le *sinus* d'un angle, $\sqrt{(1-x^2)}$ en est le *cosinus*, et x étant le *cosinus*, $\sqrt{(1-x^2)}$ en est le *sinus*; il résulte de ce que nous venons de trouver *que la fonction dérivée d'un angle exprimé par son sinus est égale à l'unité divisée par le cosinus, et que la fonction dérivée d'un angle exprimé par son cosinus est égale à l'unité divisée par le sinus, et prise avec le signe moins.*

LEÇON SIXIÈME.

Fonctions dérivées des quantités composées de différentes fonctions d'une même variable, ou dépendantes de ces fonctions par des équations données.

Les fonctions que nous venons de considérer dans les trois dernieres leçons sont comme les élémens dont se composent toutes les fonctions qu'on peut former par des opérations algébriques ; c'est pourquoi nous avons cru devoir commencer par chercher les fonctions dérivées de ces fonctions simples ; et nous allons voir maintenant comment on peut trouver les fonctions dérivées, des fonctions composées de celles-ci d'une manière quelconque.

Nous supposerons en général que p, q, r *etc*, soient des fonctions quelconques d'une même variable dont les fonctions dérivées p', q', r' *etc*, soient connues, et que y soit une fonction composée de p, q, r *etc*, dont on demande la fonction dérivée y'.

On considerera que x devenant $x + i$, y deviendra en général

$$y + iy' + \frac{i^2}{2} y'' + \text{etc} :$$

or p, q, r etc deviennent en même tems

$$p + ip' + \text{etc}, \quad q + iq' + \text{etc}, \quad r + ir' + \text{etc} ;$$

il n'y aura donc qu'à substituer ces valeurs dans l'expresion de y, développer les termes suivant les puissances de i, et le coéfficient de i sera la valeur cherchée de y'.

Ainsi, si $y = Ap + Bq + Cr + \text{etc}$; A, B, C, etc. étant des coëfficiens quelconques, on aura sur-le-champ $y' = Ap' + Bq' + Cr' + etc.$

Si $y = Apq$, la quantité pq deviendra

$$(p + ip' + etc), (q' + iq + etc.)$$
$$= pq + i(pq' + qp') + etc;$$

donc $y' = A(pq' + qp')$.

Si $y = Apqr$, on trouvera de la même manière

$$y' = A(qrp' + prq' + pqr').$$

Si $y = \frac{Ap}{q}$, la quantité $\frac{p}{q}$ deviendra

$$\frac{p + ip' + etc.}{q + iq' + etc.}$$

développant le dénominateur en séries suivant les règles connues, on aura

$$(p + ip' + etc,)\left(\frac{1}{q} - \frac{iq'}{q^2} + etc;\right.$$
$$= \frac{p}{q} + i\left(\frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2}\right) + \text{etc;}$$

donc $y' = A\left(\frac{p'}{q} - \frac{pq'}{q^2}\right)$

Soit $y = Ap^m q^n$ la quantité $p^m q^n$ deviendra $(p + ip' + \text{etc},)^m (q + iq' + \text{etc},)^n$

$= (p^m + mip^{m-1}p' + \text{etc},)(q^n + niq^{n-1}q' + \text{etc},$

$= p^m q^n + i(mp^{m-1}q^n p' + nq^{n-1}p^m q') + \text{etc.}$

donc

$$y' = A(mq^n p^{m-1}p' + np^m q^{n-1}q').$$

Substituons ensuite $x + i$ au lieu de x dans la fonction q, la fonction $f(p, q)$ deviendra pareillement

$$f(p, q) + i q' f'(q) + \text{etc.}$$

Où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p, q)$ prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante.

Quant au terme $i p' f'(p)$, il est visible qu'étant déjà multiplié par i, il se trouverait par cette nouvelle substitution augmenté de termes multipliés par i^2, i^3 *etc.*

Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p, q)$ après la substitution de $x + i$ pour x dans p et q seront simplement

$$f(p, q) + i p' f'(p) + i q' f'(q)$$

de sorte qu'on aura

$$y' = p' f'(p) + q' f'(q) = f'(p, q)$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p, q, r)$ on trouverait de la même manière

$$y' = p' f'(p) + q' f'(q) + r' f'(r) = f'(p, q, r)$$

et ainsi de suite

D'où l'on peut tirer cette conclusion générale, *que la fonction dérivée d'une fonction composée de différentes fonctions particulières sera la somme des fonctions dérivées relatives à chacune de ces mêmes fonctions considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre.*

Ce

Ce principe combiné avec le précédent suffit pour trouver les premières fonctions dérivées de toutes sortes de fonctions, ainsi que les fonctions dérivées des ordres supérieurs.

Ainsi la fonction dérivée de pq étant qp' relativement à p, et pq' relativement à q, la fonction dérivée totale sera $qp' + pq'$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

De même en regardant maintenant p' et q' comme de nouvelles fonctions dont p'' et q'' sont les fonctions dérivées, la fonction dérivée de qp' sera $q'p' + qp''$, et la fonction dérivée de pq' sera $p'q' + pq''$; de sorte que la seconde fonction dérivée de pq sera $qp'' + 2p'q' + pq''$; et ainsi de suite.

Par les mêmes principes on a

$$mq^n p^{m-1} p' + np^m q^{n-1} q'$$

pour la fonction dérivée de $p^m q^n$, le premier terme étant la fonction dérivée relative à p, et le second étant la fonction dérivée relative à q; et ainsi du reste.

Si $p = \sin x$ et $q = \cos x$, on a $p' = \cos x$ et $q' = -\sin x$; donc lorsque $y = \sin x^m \cos x^n$, on aura $y' = m \sin x^{m-1} \cos x^{n+1} - n \cos x^{n-1} \sin x^{m+1}$.

Ainsi comme la tangente d'un angle est égale au *sinus* divisé par le *cosinus*, en la dénotant par les mots *tang.* placés avant l'angle comme caractéristique, et faisant

fonction de y, p, q etc, p', q' etc, sa fonction dérivée sera la valeur de y'' ; et ainsi de suite.

Enfin si l'on avait deux fonctions y et u données par les équations

$$F(y, u, p, q \ldots) = 0, f(y, u, p, q \ldots) = 0,$$

on pourrait par les mêmes opérations trouver immédiatement les valeurs de y' et u' en fonctions de y, u, p, q etc.;

Car on auroit d'abord les équations dérivées

$$y' F'(y) + u' F'(u) + p' F'(p) + q' F'(q) + \text{etc}, = 0$$
$$y' f'(y) + u' f'(u) + p' f'(p) + q' f'(q) + \text{etc} = 0,$$

d'où l'on tirerait y' et u' ; et ainsi du reste.

Les règles que nous venons d'établir suffisent pour trouver les fonctions dérivées d'un ordre quelconque de toute fonction d'une variable de quelque manière qu'elle soit donnée, soit explicitement par des expressions déterminées, soit implicitement par des équations quelconques.

A l'égard de la notation que nous avons employée pour représenter séparément chaque partie d'une fonction dérivée, relative à chacune des fonctions particulières qui entrent dans la fonction primitive, on voit qu'elle est très-simple et très-commode, et nous nous en servirons aussi dans la suite.

On peut même par cette notation ne séparer du reste de la fonction dérivée que la partie relative à

une variable donnée. Ainsi les fonctions primes de fonctions de p et q, ou de p, q et r, ou etc, peuvent développer de cette manière

$$f'(p,q) = p'f'(p) + q'f'(q)$$
$$f'(p,q,r) = p'f'(p) + f'(q,r)$$
$$= p'f'(p) + q'f'(q) + r'f'(r)$$

et ainsi des autres.

Il faut toujours observer de ne renfermer entre les parenthèsse qui suivent la caractéristique f' des fonctions dérivées, que les variables par rapport auxquelles on veut prendre la fonction dérivée.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable entre les parenthèses comme $f'(p)$, cette expression indique que la fonction dérivée doit être prise relativement à cette variable comme si elle était seule et unique; c'est-à-dire que $f'(p)$ sera le coéfficient de i dans le développement de la fonction donnée, en y substituant simplement $p + i$ au lieu de p, quelque fonction d'ailleurs que p puisse être de x.

Quoiqu'il soit plus simple de déduire les fonctions dérivées des différens ordres les unes des autres, parce que de cette manière les mêmes règles et les mêmes opérations font trouver toutes les dérivées, et que ce soit même dans cette dérivation sucessive des fonctions que consiste l'essence et l'algoritme fondamental du calcul des fonctions dérivées; il y a néanmoins des cas où la considération immédiate des termes successifs de la série peut donner les fonctions dérivées successives d'une même fonc-

tion d'une manière plus directe et plus générale ; c'est ce qui a lieu lorsque le développement de la fonction en série peut s'exécuter facilement par les formules connues.

En effet si l'on a en général

$$y = f(p, q..)$$

p, q etc, étant des fonctions de x, et qu'on substitue $x + i$ à la place de x, cette équation deviendra

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \text{etc}$$

$$= f(p + ip' + \frac{i^2}{2}p'' + \text{etc}, q + iq' + \frac{i^2}{2}q'' + \text{etc}.....)$$

Et elle devra avoir lieu indépendamment de la quantité indéterminée i ; de sorte que si l'on peut développer directement la fonction qui forme le second membre en une série de la forme

$$f(p, q...) + iP + i^2Q + i^3R + \text{etc} ;$$

on aura sur-le-champ

$$y' = P, \frac{y''}{2} = Q, \frac{y'''}{2.3} = R \text{ etc.}$$

Soit par exemple $y = pq$ on aura à réduire en série l'expression

$$(p + ip' + \frac{i^2}{2}p'' + \text{etc})(q + iq' + \frac{i^2}{2}q'' + \text{etc}),$$

Et il est facile de voir qu'on aura

$$y' = pq' + p'q$$

$$\frac{y''}{2} = \frac{pq''}{2} + p'q' + \frac{p''q}{2}$$

$$\frac{y'''}{2.3} = \frac{p''' q}{2.3} + \frac{p' q''}{2} + \frac{p'' q'}{2} + \frac{p''' q}{2.3}$$

Et en général

$$\frac{y^{(m)}}{2.3\ldots m} = \frac{p\, q^{(m)}}{2.3\ldots m} + \frac{p' q^{(m-1)}}{2.3\ldots(m-1)} + \frac{p'' q^{(m-2)}}{2.2.3\ldots(m-2)}$$
$$+ \frac{p''' q^{(m-3)}}{2.3.2.3..(m-3} + \text{etc.}$$

l'exposant placé entre deux crochets désignant l'ordre de la fonction dérivée, de sorte qu'en multipliant par $2.3\ldots m$, on aura la formule générale

$$y^{(m)} = p\, q^{(m)} + m p' q^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2} p'' q^{(m-2)} + \text{etc.}$$

En général si on fait $y = p\, q\, r\ldots$ on trouvera de la même manière que la valeur de $\frac{y^{(m)}}{1.2.3\ldots m}$ sera composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{p^{(\lambda)}\, q^{(\mu)}\, r^{(\nu)} \ldots}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \ldots}$$

qu'on pourra donner de valeurs différentes aux nombres λ, μ, ν etc, de manière que l'on ait $\lambda + \mu + \nu$ etc, $= m$.

Supposons $p = e^{ax}$, $q = e^{bx}$, $r = e^{cx}$ etc, la quantité e étant toujours telle que $l.e = 1$, on aura $y = e^{(a+b+c+etc)x}$, et la fonction dérivée de l'ordre m, c'est-à-dire $y^{(m)}$ sera $(a+b+c+\text{etc})^m y$.

On aura de même

$$p^{(\lambda)} = a^{\lambda} p, q^{(\mu)} = b^{\mu} q, \; r^{(\nu)} = c^{\nu} r \text{ etc.}$$

Donc puisque $y = p\, q\, r\ldots$ il s'ensuit que la quantité

$$\frac{(a+b+c+etc)^m}{1.2.3\ldots m}$$

Substituons ensuite $x + i$ au lieu de x dans la fonction q, la fonction $f(p, q)$ deviendra pareillement

$$f(p, q) + i\,q'f'(q) + \text{etc.}$$

Où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p, q)$ prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante.

Quant au terme $i\,p'f'(p)$, il est visible qu'étant déjà multiplié par i, il se trouverait par cette nouvelle substitution augmenté de termes multipliés par i^2, i^3 *etc.*

Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p, q)$ après la substitution de $x + i$ pour x dans p et q seront simplement

$$f(p, q) + i\,p'f'(p) + i\,q'f'(q)$$

de sorte qu'on aura

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q) = f'(p, q)$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p, q, r)$ on trouverait de la même manière

$$y' = p'f'(p) + q'f'(q) + r'f'(r) = f'(p, q, r)$$

et ainsi de suite

D'où l'on peut tirer cette conclusion générale, *que la fonction dérivée d'une fonction composée de différentes fonctions particulières sera la somme des fonctions dérivées relatives à chacune de ces mêmes fonctions considérées séparément et indépendamment l'une de l'autre.*

Ce

Ce principe combiné avec le précédent suffit pour trouver les premières fonctions dérivées de toutes sortes de fonctions, ainsi que les fonctions dérivées des ordres supérieurs.

Ainsi la fonction dérivée de pq étant qp' relativement à p, et pq' relativement à q, la fonction dérivée totale sera $qp' + pq'$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

De même en regardant maintenant p' et q' comme de nouvelles fonctions dont p'' et q'' sont les fonctions dérivées, la fonction dérivée de qp' sera $q'p' + qp''$, et la fonction dérivée de pq' sera $p'q' + pq''$; de sorte que la seconde fonction dérivée de pq sera $qp'' + 2p'q' + pq''$; et ainsi de suite.

Par les mêmes principes on a

$$mq^n p^{n-1} p' + np^n q^{n-1} q'$$

pour la fonction dérivée de $p^n q^n$, le premier terme étant la fonction dérivée relative à p, et le second étant la fonction dérivée relative à q; et ainsi du reste.

Si $p = \sin x$ et $q = \cos x$, on a $p' = \cos x$ et $q' = -\sin x$; donc lorsque $y = \sin x^n \cos x^n$, on aura $y' = m \sin x^{n-1} \cos x^{n+1} - n \cos x^{n-1} \sin x^{n+1}$.

Ainsi comme la tangente d'un angle est égale au *sinus* divisé par le *cosinus*, en la dénotant par les mots *tang.* placés avant l'angle comme caractéristique, et faisant

$$y = tang.\ x = \frac{sin\ x}{cos\ x}$$

on aura

$$y' = 1 + \frac{sin\ x^2}{cos\ x^2} = \frac{1}{cos\ x^2}.$$

Et en général, si $y = tang.\ p$, on trouvera

$$y' = \frac{p'}{cos\ p^2}$$

Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y.

Représentons en général cette équation par $F(y, x) = 0$, il est clair que si on regarde y comme une fonction de x déterminée par cette équation, et qu'on imagine cette fonction substituée au lieu de y dans $F(y, x)$, il en résultera une fonction de x qui sera identiquement nulle, quelle que soit la valeur de x, et par conséquent aussi en mettant $x + i$ à la place de x quelle que soit la valeur de i.

Dénotons cette fonction par z, et comme x devenant $x + i$, z devient $z + iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \text{etc}$,

on aura quelle que soit la valeur de i l'équation

$$z + iz' + \frac{i^2}{2} z'' + \text{etc}, = 0 ;$$

d'où l'on tire les équations

$$z = 0, z' = 0, z'' = 0\ etc.$$

Maintenant z étant $= F(y, x)$, on aura par les formules ci-dessus $z' = y' F'(y) + F'(x)$, en dé-

notant par $F'(y)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement à y seul et par $F'(x)$ la fonction prime de $F(y, x)$ prise relativement à x, et faisant $x' = 1$, puisque x devient simplement $x + i$.

Ainsi l'équation dérivée $z' = 0$ sera $y' F'(y) + F'(x) = 0$, d'où l'on tire

$$y' = -\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

On aura de cette manière la valeur de y' en fonction de x et y; de là en regardant toujours y comme fonction de x, on pourra déduire la valeur de y'' en fonction de x et y. Car en supposant pour abréger $y' = f(y, x)$ la fonction dérivée de $f(y, x)$ sera de la forme $y' f'(y) + f'(x)$; donc substituant pour y' sa valeur, on aura $y'' = f(y, x) \times f'(y) + f'(x)$, et ainsi de suite

On trouverait les mêmes valeurs de y'', y''' *etc*, par les équations $z'' = 0$, $z''' = 0$ *etc.*

Si l'on avait plus généralement l'équation

$$F(y, p, q \ldots) = 0,$$

on trouverait de la même manière l'équation dérivée,

$$y' F'(y) + p' F'(p) + q' F'(q) + \text{etc} = 0;$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{p' F'(p) + q' F'(q) + \text{etc}}{F'(y)}.$$

Et regardant de nouveau la valeur de y' comme une

fonction de y, p, q etc, p', q' etc, sa fonction dérivée sera la valeur de y''; et ainsi de suite.

Enfin si l'on avait deux fonctions y et u données par les équations

$$F(y, u, p, q \ldots) = 0, f(y, u, p, q \ldots) = 0,$$

on pourrait par les mêmes opérations trouver immédiatement les valeurs de y' et u' en fonctions de y, u, p, q etc;

Car on auroit d'abord les équations dérivées

$$y' F'(y) + u' F'(u) + p' F'(p) + q' F'(q) + \text{etc}, = 0$$
$$y' f'(y) + u' f'(u) + p' f'(p) + q' f'(q) + \text{etc} = 0,$$

d'où l'on tirerait y' et u'; et ainsi du reste.

Les règles que nous venons d'établir suffisent pour trouver les fonctions dérivées d'un ordre quelconque de toute fonction d'une variable de quelque manière qu'elle soit donnée, soit explicitement par des expressions déterminées, soit implicitement par des équations quelconques.

A l'égard de la notation que nous avons employée pour représenter séparément chaque partie d'une fonction dérivée, relative à chacune des fonctions particulières qui entrent dans la fonction primitive, on voit qu'elle est très-simple et très-commode, et nous nous en servirons aussi dans la suite.

On peut même par cette notation ne séparer du reste de la fonction dérivée que la partie relative à

une variable donnée. Ainsi les fonctions primes de fonctions de p et q, ou de p, q et r, ou etc, peuvent développer de cette manière

$$f'(p,q) = p'f'(p) + q'f'(q)$$
$$f'(p,q,r) = p'f'(p) + f'(q,r)$$
$$= p'f'(p) + q'f'(q) + r'f'(r)$$

et ainsi des autres.

Il faut toujours observer de ne renfermer entre les parenthèsse qui suivent la caractéristique f' des fonctions dérivées, que les variables par rapport auxquelles on veut prendre la fonction dérivée.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable entre les parenthèses comme $f'(p)$, cette expression indique que la fonction dérivée doit être prise relativement à cette variable comme si elle était seule et unique; c'est-à-dire que $f'(p)$ sera le coëfficient de i dans le développement de la fonction donnée, en y substituant simplement $p + i$ au lieu de p, quelque fonction d'ailleurs que p puisse être de x.

Quoiqu'il soit plus simple de déduire les fonctions dérivées des différens ordres les unes des autres, parce que de cette manière les mêmes règles et les mêmes opérations font trouver toutes les dérivées, et que ce soit même dans cette dérivation sucessive des fonctions que consiste l'essence et l'algoritme fondamental du calcul des fonctions dérivées; il y a néanmoins des cas où la considération immédiate des termes successifs de la série peut donner les fonctions dérivées successives d'une même fonc-

pourra se développer en autant de termes de la forme

$$\frac{a^{\lambda}\, b^{\mu}\, c^{\nu} \ldots .}{1.\,2.\,3\ldots\lambda \times 1.\,2.\,3\ldots\mu \times 1.\,2.\,3\ldots\nu \times \ldots}$$

qu'il y aura de manières différentes de satisfaire à l'équation $\lambda+\mu+\nu+$ etc, $= m$; ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé d'une autre manière à la fin de la Leçon IVe.

Faisons maintenant $p = x^{a}$, $q = x^{b}$, $r = x^{c}$ etc, on aura $y = x^{a+b+c+\text{etc.}} = x^{A}$ en faisant $A = a + b + c +$ etc. Donc prenant les fonctions dérivées des ordres m, μ, ν etc, on aura

$$y^{(m)} = A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)\, x^{A-m}$$

$$p^{(\lambda)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)\, x^{a-\lambda}$$

$$q^{(\mu)} = b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)\, x^{b-\mu}$$

$$r^{(\nu)} = c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1)\, x^{b-\nu} \text{ etc.}$$

Donc puisque $A - m = a - \lambda + b - \mu + c - \nu +$ etc, la quantité

$$\frac{A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots.\quad m}$$

se trouvera composée d'autant des quantités de la forme

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)}{1.\qquad 2.\qquad 3.\ldots.\qquad \lambda}$$

$$\times\ \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)}{1.\,2.\quad 3.\ldots.\quad \mu}$$

$$\times\ \frac{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1)}{1.\quad 2.\quad 3.\ldots.\quad \nu}$$

$\times$ etc. qu'il

qu'il y a de manières différentes de satisfaire à l'équation $m = \lambda + \mu + \nu + \text{etc}$; ce qui indique une analogie singulière entre le développement de la puissance d'un multinome, et celui du produit continuel du même degré.

En effet ayant développé une puissance comme $(a + b + c + \text{etc})^m$ en ses différens termes, on aura tout de suite le développement du produit continuel $A(A-1)(A-2)\ldots(A-m+1)$, où $A = a + b + c$ etc, en substituant dans chaque terme à la place des puissances a^λ, b^μ, c^ν etc, les produits continuels $a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)$, $b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)$, $c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1)$, etc. On trouve une démonstration directe de ce théoreme pour le binome dans l'ouvrage de Kramp qui vient de paraître sous le titre *d'Analise des réfractions*.

Nous terminerons cette leçon par une observation importante sur la nature des fonctions dérivées.

Il est facile de se convaincre par la manière dont les fonctions dérivées dépendent de la fonction primitive, que ces fonctions sont absolument déterminées, de sorte qu'une fonction donnée ne peut avoir que des fonctions dérivées données aussi et uniques pour chaque ordre.

Il n'en est pas de même des fonctions primitives à l'égard de leurs dérivées ; car puisque la fonction dérivée de toute quantité constante est nulle, il s'ensuit que si une fonction donnée est primitive à l'é-

gard d'une autre fonction donnée elle le sera encore, étant augmentée ou diminuée d'une constante quelconque. Ainsi une fonction donnée peut avoir une infinité de fonctions primitives à raison de la constante qu'on y peut ajouter. Mais il ne s'ensuit pas que toutes les fonctions primitives dont elle est susceptible ne puissent différer que par une constante ; c'est ce que nous allons démontrer.

Soit une fonction donnée fx, dont Fx et φx soient également fonctions primitives. On aura donc par l'hypothèse $F'x = fx$, et $\varphi' x = fx$; donc prenant les fonctions dérivées succesives, on aura aussi $F'' x = f'x$, $F''' x = f'' x$ etc, et de même $\varphi'' x = f' x$, $\varphi''' x = f'' x$ etc. Considérons maintenant les fonctions $F(x+i)$ et $\varphi(x+i)$, on a par le développement $F(x+i) = Fx + iF'x + \frac{i^2}{2} F''x +$ etc, donc substituant les valeurs de $F'x$, $F'' x$ etc, on aura

$$F(x+i) = Fx + ifx + \frac{i^2}{2} f'x + \frac{i^3}{2.3} f'' x + \text{etc.}$$

Et de même

$$\varphi(x+i) = \varphi x + ifx + \frac{i^2}{2} f' x + \frac{i^3}{2.3} f' x + \text{etc,}$$

donc retranchant l'une de l'autre ces deux équations on aura

$$F(x+i) - \varphi(x+i) = Fx - \varphi x.$$

Comme cette équation doit avoir lieu quels que soient x et i, et que le premier membre est une fonction de $x+i$, et le second une pareille fonction de x, il est visible que cette fonction ne peut-être qu'une

constante indépendante de x et i. On aura donc nécessairement $Fx - \varphi x = K$, K étant une constante, et par conséquent $Fx = \varphi x + K$; d'où l'on voit que si φx est une fonction primitive de fx, toute autre fonction primitive Fx de la même fonction fx ne pourra différer de φx que par une constante.

Il s'ensuit délà que lorsqu'on aura trouvé d'une manière quelconque une fonction primitive d'une fonction donnée, en y ajoutant une constante arbitraire on aura l'expression générale de la fonction primitive de la fonction donnée.

LEÇON SEPTIÈME.

Sur la manière de rapporter les fonctions dérivées à différentes variables.

Nous avons vu comment les fonctions dérivées naissent des fonctions primitives par le simple développement lorsqu'on atribue à une variable de la fonction un accroissement indéterminé.

Ainsi toute fonction dérivée est nécessairement relative à une variable, et une fonction qui contient plusieurs quantités peut avoir différentes fonctions dérivées suivant les quantités qu'on y considere comme variables. Lorsque ces quantités dépendent les unes des autres, il y a aussi une relation entre les fonctions dérivées qui y sont relatives, par laquelle on peut déduire les fonctions les unes des autres; cette relation étant un point important de la théorie des fonctions, nous allons nous en occuper dans cette leçon.

En regardant y comme une simple fonction de x, on sait que y devient $y + iy' + \frac{i^2}{2} y'' + \text{etc}$; x devenant $x + i$. Si on suppose que x soit elle-même une fonction d'une autre variable quelconque t, et qu'on veuille regarder y comme fonction de t, alors t devenant $t + i$, y deviendra aussi de la forme

$$y + iy' + \frac{i^2}{2} y'' + \text{etc.}$$

Mais pour distinguer les fonctions dérivées y' y'' etc, qui dans la première formule se rapportent à x, de celles de la seconde qui se rapportent à t,

nous désignerons pour un moment les premières par (y'), (y'') etc, de manière que x devenant $x+i$, y deviendra

$$y+i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\text{etc.}$$

Or x étant regardé comme fonction de t, lorsque t devient $t+i$, x devient $x+ix'+\frac{i^2}{2}x''+$ etc; donc si dans la formule précédente on met à la place de i l'accroissement de x, $ix'+\frac{i^2}{2}x''+$ etc, on aura également ce que y devient lorsque t devient $t+i$. Ainsi on aura l'équation identique,

$$y+(ix'+\frac{i^2}{2}x''+\text{etc})(y')+\frac{1}{2}(ix'+\frac{i^2}{2}x''+\text{etc})^2(y'')+\text{etc}, = y+iy'+\frac{i^2}{2}y''+\text{etc};$$

D'où l'on tire par la comparaison des termes affectés des différentes puissances de i

$$x'(y')=y', x''(y')+x'^2(y'')=y'', \text{ etc.}$$

La première équation donne $(y')=\frac{y'}{x'}$; la seconde équation donnera

$$(y'')=\frac{y''}{x'^2}-x''(y'),$$

et substituant la valeur précédente de (y') on aura

$$(y'')=\frac{y''}{x'^2}-\frac{x''y'}{x'^3}.$$

La troisième équation donnerait la valeur de (y''') et ainsi de suite. Mais j'observe qu'on peut déduire immédiatement la valeur de (y'') de celle de (y'), et successivement celle de $(y^{(n)})$ de celle de (y'') etc

par la loi uniforme qui doit regner entre ces fonctions dèrivées succesives.

En effet puisque (y') fonction dérivée de y par rapport à x est égal à $\frac{y'}{x'}$, c'est-à-dire à la fonction dérivée de y par rapport à t divisée par celle de x, de même (y'') fonction dérivée de (y') par rapport à x sera égale à la fonction dérivée de $\frac{y'}{x'}$ par rapport à t, divisé par x', et ainsi de suite. Or la fonction dérivée de $\frac{y'}{x'}$ est $\frac{y''}{x'} - \frac{y'x''}{x'^2}$; donc on aura $(y'') = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$, comme on l'a trouvé par la seconde équation. Et ainsi de suite.

Par ces substitutions on dépouille pour ainsi dire les fonctions dérivées de ce qui dépend de la variable à laquelle elles se rapportaient originairement, et on les généralise de manière qu'elles peuvent se rapporter également à toute autre variable.

Or ce qui déterminait les fonctions dérivées de y à se rapporter à la variable x, c'était qu'elles résultaient de l'accroissement i attribué à cette variable ; au lieu qu'en rapportant ces fonctions à une autre variable dont x est censée fonction, l'accroissement de x devient alors $ix' + \frac{i^2}{2}x'' +$ etc : i étant l'accroissement de la nouvelle variable. Ainsi comme le cas pasticulier où l'accroissement de x est simplement i, resulte de l'expression générale de l'accroissement de x, en y faisant $x' = 1$, il s'ensuit

que $x' = 1$ est la condition qui détermine les fonctions dérivées à se rapporter à la variable x, et qu'en général pour les rapporter à toute autre variable, il n'y aura qu'à supposer égale à l'unité la fonction prime de cette variable.

Il résulte de là cette conclusion générale que si une formule contient les fonctions dérivées y', y'' etc; relatives à une variable x, et qu'on veuille les rapporter à une autre variable quelconque, il faudra changer y' en $\frac{y'}{x'}$, y'' en

$$\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'} \text{ ou } \frac{y''}{x'^2} - \frac{y' x''}{x'^3}, \; y''' \text{ en}$$

$$\frac{\left(\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}\right)'}{x'} \text{ ou } \frac{\left(\frac{y''}{x'^2} - \frac{y' x''}{x'^3}\right)'}{x'}$$

$$\text{ou bien } \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3 y'' x''}{x'^4} - y' \left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3 x''^2}{x^5}\right)$$

Et ainsi de suite. Si t est la nouvelle variable à laquelle on veut rapporter les fonctions dérivées, cette variable étant une fonction quelconque de x et y, il n'y aura qu'à faire $t' = 1$, et par conséquent $t'' = 0$, $t''' = 0$ etc; équations par lesquelles on déterminera les valeurs de x', x'' etc, ou de y', y'' etc.

Ce principe est général et doit s'appliquer à toutes les fonctions dérivées qui se rapportent à une même variable. Il est d'un grand usage dans le cal-

cul des fonctions et constitue un des principes fondamentaux de l'algorithme de ce calcul.

Le cas le plus simple est celui où y étant supposée fonction de x, et ses fonctions dérivées y', y'' etc ; étant rapportées à x, on veut au contraire regarder x comme fonction de y, et rapporter à y les fonctions dérivées x', x'' etc. On fera dans ce cas les substitutions indiquées ci-dessus et on supposera $y' = 1$, $y'' = 0$ etc. On substituera donc $\frac{1}{x'}$ à la place de y', $-\frac{x''}{x'^3}$ à la place de y'' et ainsi des autres.

Ainsi ayant trouvé dans la Leçon IV, que $y = a^x$ donne, relativement à x, $y' = a^x la = y la$, on pourra avoir immédiatement la valeur de x' relativement à y, en substituant simplement $\frac{1}{x'}$ à la place de y' ; ce qui donnera $x' = \frac{1}{y\ la}$.

Comme x est le logarithme de y pour la base a, on a par-là la fonction dérivée du logarithme.

De même en supposant $y = sin\ x$ on a vu dans la leçon V que l'on a, relativement à x, $y' = cos\ x$; donc pour avoir réciproquement la fonction dérivée x' de l'angle par le sinus y, il n'y aura qu'à substituer $\frac{1}{x'}$ à la place de y', ce qui donnera $x' = \frac{1}{cos\ x}$ $= \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Si on fait $y = cos\ x$, on a $y' = -sin\ x$; donc

donc on aura de la même manière $x' = -\frac{1}{\sin x}$

$= -\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$ Ces résultats s'accordent avec ceux qu'on a trouvés dans les endroits cités d'une manière directe mais plus longue.

Enfin ayant vu, dans la leçon VI, que $y = tang.\ x$ donne $y' = \frac{1}{\cos x^2}$, si on veut avoir la fonction dérivée de l'arc par la tangente, on aura sur le champ

$$x' = \cos x^2 = \frac{1}{1+tang.\ x^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

En général puisque $y = tang.\ p$ donne $y' = \frac{p'}{\cos p^2}$ on aura réciproquement $p' = y' \cos p^2$, p étant une fonction quelconque de x.

Si maintenant on veut regarder p comme fonction de y et rapporter la fonction dérivée p' à la variable y, on fera $y' = 1$, et l'on aura $p' = \cos p^2 = \frac{1}{1+y^2}$ comme ci-dessus.

La formule $x' = \cos x^2$ est très-propre pour trouver facilement les fonctions dérivées de x des ordres superieurs. En effet on aura d'abord

$$x'' = -2x' \sin x \cos x = -x' \sin 2x$$
$$= -\sin 2x \cos x^2.$$

en substituant la valeur précédente de x'. Prenant de nouveau les fonctions dérivées, on aura

$$x''' = -2x'(\cos 2x \cos x^2 - \sin 2x \sin x \cos x)$$

$$= -2x' \cos 3x \cos x = -2 \cos 3x \cos x^3,$$

et continuant de la même manière, on aura

$$x'''' = 2.3x'(\sin 3x \cos x^3 + \cos 3x \sin x \cos x^2)$$

$$= 2.3x' \sin 4x \cos x^2 = 2.3 \sin 4x \cos x^4,$$

$$x^v = 2.3.4x'(\cos 4x \cos x^4 - \sin 4x \sin x \cos x^3)$$

$$= 2.3.4x' \cos 5x \cos x^3 = 2.3.4 \cos 5x \cos x^5,$$

et ainsi de suite.

Ayant ainsi toutes les fonctions dérivées de x relativement à y c'est-à-dire en supposant $x = fy$, si on les substitue dans la formule

$$x + ix' + \frac{i^2}{2}x'' + \text{etc},$$

on aura la valeur de x répondant à $y + i$.

Ainsi on aura la valeur de l'arc dont la tangente sera *tang.* $x + i$, exprimé par la série

$$x + i \cos x. \cos x - \frac{i^2 \cos x^2}{2} \sin 2x - \frac{i^3 \cos x^3}{3}$$

$$\cos 3x + \frac{i^4 \cos x^4}{4} \sin 4x + \frac{i^5 \cos x^5}{5} \cos 5x - \text{etc.}$$

formule remarquable par sa simplicité et sa généralité.

Si on fait $x = o$, on aura

$$arc.tang.\, i = i - \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} + \text{etc},$$

formule connue et due à Leibnitz ; mais il n'est permis de faire $x = o$ qu'autant qu'on est assuré d'avance de la forme de la série.

LEÇON VIII.

Du développement des fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Analise de ces cas. Des valeurs des fractions dont le numerateur et le dénominateur évanouissent à la fois.

La théorie des fonctions dérivées est fondée sur le développement des fonctions lorsqu'on attribue à une variable un accroissement indéterminé. Nous avons démontré dans la Leçon II que ce développement ne peut contenir que des puissances entières et positives de la quantité dont la variable est augmentée, tant que cette variable demeure indéterminée, et nous avons ensuite déduit de cette forme les loix de la dérivation des fonctions. Il est donc nécessaire avant d'aller plus loin d'examiner les cas où elle pourrait se trouver en défaut, et les conséquences qui en résulteraient relativement aux fonctions dérivées.

Nous avons vu dans la même leçon, que la série du développement de $f(x+i)$ ne peut contenir de puissances négatives de i à moins que l'on n'ait $fx = \infty$ à l'infini, parce qu'en supposant $i = o$, les termes qui contiendraient de pareilles puissances deviendraient infinis. On peut prouver de la même manière que la série ne pourra contenir aucun terme multiplié par log. i ou par une puissance positive quelconque de log. i, si la même condition n'a

lieu, ces sortes de termes devenant également infinis lorsque $i = o$. Or cette condition exige que la variable x ait une valeur déterminée, qu'on trouvera par la résolution de l'équation

$$fx = \frac{1}{o} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{fx} = o.$$

Soit donc a une racine de l'équation $\frac{1}{fx} = o$, de manière que l'on ait $\frac{1}{fx} = \frac{(x-a)^m}{Fx}$, Fx étant une fonction de x qui ne devienne ni nulle ni infinie, lorsque $x = a$, et m étant un nombre positif quelconque.

En mettant $x + i$ à la place de x, et faisant $x = a$, on aura

$$f(x+i) = \frac{F(a+i)}{i^m}$$

où l'on voit que la série du développement de $f(x+i)$ aura dans ce cas des termes de la forme

$$\frac{1}{i^m}, \quad \frac{1}{i^{m-1}} \quad \text{etc.}$$

Il en sera de même si fx contient une partie qui ait pour facteur $log.(x-a)$, ou une puissance quelconque de ce logarithme ; alors la série du développement de $f(x+i)$ contiendra, lorsque $x = a$, des termes de la forme $log.\, i$ ou $(log.\, i)^m$, et en général de la forme $i^m (log.\, i)^n$.

Considérons maintenant les cas où ce développe-

ment pourrait contenir des puissances positives, mais fractionnaires de i. La démonstration que nous avons donnée pour prouver l'absence de ces sortes de termes est fondée sur ce que ces termes augmenteraient le nombre des radicaux dans le développement de $f(x+i)$, tandis qu'il est évident que cette fonction ne peut contenir que les mêmes radicaux que la fonction fx, tant que x est supposé une quantité quelconque indéterminée. Mais cette démonstration cesse d'avoir lieu lorsqu'on donne à x une valeur déterminée telle qu'elle fasse disparaître un radical dans fx: car alors ce radical pourra être remplacé par un radical de i dans le développement de $f(x+i)$. En effet supposons que la fonction fx contienne un radical qui s'évanouisse lorsque $x=a$, tel que $(x-a)^{\frac{m}{n}}$, m et n étant des nombres entiers; la fonction $f(x+i)$ contiendra le radical correspondant $(x-a+i)^{\frac{m}{n}}$ lequel en faisant $x=a$ devient $i^{\frac{m}{n}}$; de sorte que le développement de cette fonction suivant les puissances de i pourra contenir le radical $i^{\frac{m}{n}}$ et toutes ses puissances entières et positives.

Cette conclusion n'aurait pas lieu si la valeur particulière de x n'anéantissait pas le radical, mais le faisait seulement disparaître en rendant nulle une quantité par laquelle il serait multiplié. Car quoique le radical puisse disparaître de cette manière

de la fonction fx, il pourrait ne pas disparaître dans les fonctions dérivées $f'x$, $f''x$ etc, qui entrent dans le développement de $f(x+i)$, et alors la démonstration conserverait toute sa force. Ainsi si un radical de la fonction fx se trouvait multiplié par $(x-a)^m$, m étant un nombre entier positif; ce radical y disparaîtrait lorsque $x=a$; mais dans la fonction $f(x+i)^m$ il seraitmultiplié par $(x-a+i)^m$, et dans le cas de $x=a$, il le serait par i^m. Donc dans le développement de cette fonction il ne pourrait paraître alors avant le terme qui contiendrait la puissance i^m; par conséquent il disparaîtrait des fonctions dérivées $f'x$, f'' etc; jusqu'à $f^{(m-1)}x$, mais reparaîtrait dans les fonctions dérivées des ordres suivans; de sorte que le développement de $f(x+i)$ contiendrait toujours dans ce cas le même radical. Il n'y a donc que le cas où le radical est détruit dans la fonction fx par une valeur particulière de x, dans lequel le développement de $f(x+i)$ doive contenir des radicaux de i, et il reste maintenant à voir comment on pourra juger que cela doive avoir lieu.

Pour cela j'observe que les fonctions $f'(x+i)$, $f''(x+i)$ etc sont également les fonctions dérivées de $f(x+i)$ soit qu'on les prenne relativement à x, soit qu'on les prenne relativement à i, ce qui est évident, puisqu'en augmentant soit x, soit i d'une même quantité quelconque on a le même accroissement de la quantité $x+i$. D'où il suit que l'on aura également les valeurs de $f'x$, $f''x$ etc; quel que soit x

en prenant les fonctions dérivées successives de $f(x+i)$ relativement à i, et faisant ensuite $i=0$.

Or si on suppose que le développement de $f(x+i)$ doive contenir lorsque $x=a$, un terme affecté de i^m tel que $A\,i^m$, A étant une fonction de a, et m n'étant pas un nombre entier positif; en prenant les fonctions dérivées relativement à i, il faudra que les développemens des fonctions $f'(x+i)$, $f''(x+i)$ etc contiennent les termes $m\,A\,i^{m-1}$, $m\,(m-1)\,A\,i^{m-2}$ etc. Donc faisant $i=0$, on en conclura que les fonctions fx, $f'x$, $f''x$ etc; lorsque $x=a$ contiendront respectivement les termes $A\,o^m$, $m\,A\,o^{m-1}$, $m\,(m-1)\,A\,o^{m-2}$ etc.

Si m est un nombre quelconque négatif, il est clair que tous ces termes seront infinis.

Si m est un nombre positif non entier, soit n le nombre entier immédiatement plus grand que m, il est visible que le terme $m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,A\,o^{m-n}$ sera infini, ainsi que tous les suivans et que tous les précédens seront nuls. D'où il s'ensuit que les fonctions dérivées de l'ordre $n^{ième}$ et des ordres suivans deviendront infinies lorsque $x=a$.

Dans ce cas donc si x est l'indice de l'ordre de la première fonction qui devient infinie, le développement de $f(x+i)$ devra contenir un terme de forme i^m, m étant un nombre compris entre $n-1$ et n.

Si $n=o$, c'est-à-dire, si la fonction fx devient elle-même infinie, ce développement contiendra alors des puissances négatives de i.

On

On doit appliquer aux logarithmes ce qu'on vient de démontrer sur les puissances fractionnaires de i. Car on a vu à la fin de la leçon IV, que les logarithmes répondent aux puissances fractionnaires dont l'exposant est infiniment petit, c'est-à-dire aux racines infinitièmes, et que c'est par cette raison qu'il y a toujours une infinité de logarithmes répondant à un même nombre.

Aussi par la même raison lorsqu'on résout une fonction en série suivant les puissances d'une même quantité, il peut se trouver quelquefois le logarithme de cette quantité entre les puissances positives, et les puissances négatives de la même quantité, lorsque la fonction elle-même contient des logarithmes.

Ainsi, si la fonction fx contient des logarithmes, le développement de $f(x+i)$ pourra contenir dans le cas particulier de $x=o$ des termes de la forme $i^m(log.\ i)^n$, et les fonctions dérivées $f'(x+i)$, $f''(x+i)$ etc, contiendront alors des termes de la forme $i^{m-1}(log.\ i)^n$, $i^{m-1}(log\ i)^{n-1}$, de la forme $i^{m-2}(log.i)^n$, $i^{m-2}(log.i)^{n-1}$, $i^{m-2}(log.i)^{n-2}$, et ainsi de suite. Or lorsque $i=o$ toute quantité de la forme $(l.i)^m$ est infinie, lorsque n est positif, et nulle lorsque n est négatif, et toute quantité de la forme $i^m(l.i)^n$ est nulle ou infinie suivant que m est positif ou negatif quel que soit l'exposant n; donc quelqu'une des fonctions, fx, $f'x$, $f''x$ etc, deviendra nécessairement infinie, et alors toutes les suivantes à l'infini seront infinies aussi. En général tout terme de la forme

$i^m (\log. i)^n$ n étant un nombre positif, tendra infinie la fonction dérivée $f^{(\mu)} x$ de l'ordre μ, μ étant un nombre entier égal ou immédiatement plus grand que m.

On peut donc conclure en général que le développement $fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x +$ etc de la fonction $f(x+i)$ ne peut devenir fautif pour une valeur déterminée de x qu'autant qu'une des fonctions fx, $f'x$, $f''x$ etc, deviendra infinie en donnant à x cette valeur; et que ce développement ne sera fautif qu'à commencer du terme qui deviendra infini.

Pour trouver alors la vraie forme du développement suivant les puissances ascendantes de i, il faudra faire d'abord dans la fonction $f(x+i)$, x égal à la valeur donnée, et développer ensuite suivant les puissances croissantes de i par les règles connues, en ayant égard aux puissances fractionnaires ou négatives de i qui se trouveraient dans la fonction même.

Pour confirmer par quelques exemples ce que nous venons de démontrer, supposons d'abord que l'on ait

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

et qu'on demande le développement $f(x+i)$ lorsque $x = a$.

En prenant les fonctions dérivées suivant les règles générales, on aura

$$f' x = 2(a - x) + \frac{a x}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

$$f'' x = -2 + \frac{a}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} - \frac{a x^2}{(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et ainsi de suite.

En faisant $x = 0$, on a $fx = a^2$, $f'x = -\frac{1}{0}$; donc toutes les fonctions dérivées des ordres suivans seront aussi infinies, et le développement de $f(a + i)$ contiendra nécessairement un terme de la forme $A i^m$ m étant entre 0 et 1.

En effet on aura par la substitution de $a + i$ dans l'expression de fx, $f(a + i) = a^2 - i^2 + a\sqrt{i} \times \sqrt{(2a + i)}$, d'où l'on voit que le développement suivant les puissances de i contiendra des termes de la forme $\sqrt{i}$, $i\sqrt{i}$, $i^2\sqrt{i}$ etc.

Soit en second lieu

$$fx = \sqrt{x} + (x - a)^2 l(x - a),$$

on aura ces fonctions dérivées

$$f' x = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2(x - a) l(x - a) + x - a$$

$$f'' x = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 2 l(x - a) + 3$$

$$f''' x = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} + \frac{2}{x - a}$$

etc.

valeur de y''; mais dans le cas proposé, la quantité $F'(y)$ devenant nulle, le terme qui contient y'' disparaîtra et l'équation restante sera une équation du second degré en y' par laquelle on déterminera la valeur de y' qui sera par conséquent double.

Soit par exemple

$$fx = x + (x-a)\sqrt{(x-b)},$$

on aura

$$f'x = 1 + \sqrt{(x-b)} + \frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}}.$$

Faisant $x = a$, on a $fx = a$, et $f'x = 1 + \sqrt{(a-b)}$, où l'on voit que le radical disparait dans la valeur de fx, mais non pas dans celle de $f'x$, en sorte que la première est simple et la seconde double.

Maintenant si on fait $fx = y$, et qu'on éleve l'équation au carré pour faire disparaître le radical, on aura

$$(y-x)^2 = (x-a)^2\ (x-b).$$

En prenant les fonctions primes on aura celle-ci

$$2(y-x)(y'-1) = 2(x-a)(x-b) + (x-a)^2;$$

d'où l'on tire

$$y' = 1 + \frac{2(x-a)(x-b) + (x-a)^2}{(y-x)}$$

Faisant $x = a$, on a aussi $y = a$; ce qui donne

$$y' = \frac{0}{0}$$

On passera donc aux fonctions secondes, et l'on aura cette équation du second ordre,

$$2(y-x)y'' + 2(y'-1)^2 = 4(x-a) + 2(x-b).$$

Ici la supposition de $x = a$, et $y = a$, donne $(y'-1)^2 = a-b)$, d'où l'on tire $y' = 1 + \sqrt{(a-b)}$, comme plus haut.

Il peut arriver que la même valeur de x qui détruit les termes de la première équation dérivée, détruise aussi ceux de la seconde ; il faudra alors passer à l'équation tierce, laquelle par la destruction des termes qui contiendront y'' et y''', deviendra une simple équation en y' mais du troisième degré ; et ainsi de suite ; cela dépend de la nature du radical qui aura été détruit dans y, et qui doit être remplacé par le dégré de l'équation d'où dépend la valeur de y'.

Supposons en second lieu que la même valeur de x qui fait disparaître un radical dans fx, le fasse disparaître aussi dans $f'x$ sans le faire disparaître néanmoins dans $f''x$, alors les valeurs correspondantes de fx, et $f'x$ seront en même nombre, mais celles de $f''x$ seront en nombre plus grand. Si donc on fait évanouir ce radical dans l'équation $y = fx$, la valeur de y'' qu'on en déduira, se trouvera $= \frac{0}{0}$,

et il faudra passer aux équations dérivées d'un ordre supérieur pour avoir la valeur de y'',

Soit pour en donner un exemple

$$y = x + (x-a)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(x-b)},$$

on aura

$$y' = 1 + 2(x-a)\sqrt{(x-b)} + \frac{(x-a)^2}{2\sqrt{(x-b)}},$$

$$y'' = 2\sqrt{(x-b)} + \frac{2(x-a)}{\sqrt{(x-b)}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}$$

Faisant $x = a$ on a $y = a$, $y' = 1$ et $y'' = 2\sqrt{(a-b)}$.

Mais si on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle,

$$(y-x)^2 = (x-a)^4 (x-b),$$

on en tirera l'equation dérivée

$$2(y-x)(y'-1) = 4(x-a)^3 (x-b) + (x-a)^4,$$

Dans laquelle en faisant $x = a$ et $y = a$, tout se détruit.

On passera donc à l'équation dérivée du second ordre laquelle sera

$$(y-x)y'' + (y'-1)^2 = 6(x-a)^2 (x-b) + 4(x-a)^3.$$

Faisant $x = a$, et $y = a$, on aura $(y'-1)^2 = 0$, et par conséquent $y' = 1$; mais pour avoir la valeur de y'', il faudra avoir recours à l'équation tierce, et même à l'équation quarte.

On

On aura ainsi

$$(y-x)\,y''' + 3\,(y'-1)''' = 18\,(x-a)^2 + 12\,(x-a)\,(x-b),$$

où tout se détruit encore en faisant $x=a$, $y=a$, $y'=1$.

L'équation dérivée de l'ordre suivant sera donc

$$(y-x)\,y^{IV} + 3\,(y'-1)\,y''' + 3\,y''^2 = 48\,(x-a) + 12\,(x-b).$$

Faisant ici $x=a$, $y=a$, $y'=1$, on aura $3\,y''^2 = 12\,(a-b)$, d'où l'on tire $y'' = 2\sqrt{(a-b)}$ comme plus haut.

Nous ne pousserons pas cette analise plus loin, qui d'ailleurs n'a plus de difficultés d'après les principes établis. Mais nous allons donner à cette occasion la théorie de la methode pour trouver la valeur d'une fraction dans les cas où le numérateur et le dénominateur deviennent nuls à la fois.

Soit $\frac{fx}{Fx}$ une pareille fraction, fx et Fx étant des fonctions de x, telles que la supposition de $x=a$ les rende toutes deux nulles à la fois, et que l'on demande la valeur de cette fraction lorsque $x=a$.

On fera $y = \frac{fx}{Fx}$, et par conséquent $y\,Fx = fx$, en supposant $x=a$, cette équation se vérifie d'elle-même, et ne peut pas servir à déterminer la valeur de y. Mais en prenant l'équation dérivée, on aura $y'\,Fx + y\,F'x = f'x$; la supposition de $x=a$ dé-

truit le terme $y' F x$, et le reste de l'équation donne

$$y = \frac{f' x}{F' x}.$$

S'il arrivait que les fonctions primes $f' x$ et $F' x$ devinssent aussi nulles par la même supposition, on trouverait alors par le même principe, en substituant dans l'équation ci-dessus, $f' x$, $F' x$, au lieu de $f x$, $F x$, cette nouvelle expression de y,

$$y = \frac{F'' x}{f'' x}.$$

On pourrait aussi déduire la même expression de l'équation dérivée trouvée ci-dessus, en considérant que comme elle se vérifie d'elle-même lorsque $x = a$, elle ne peut servir à la détermination de y; que par conséquent il sera nécessaire de passer à la seconde équation dérivée, laquelle sera $y'' F x + 2 y' F' x + y F'' x = f'' x$. La supposition de $x = a$ rendant nulles les fonctions $F x$ et $F' x$, les termes qui contiennent y' et y'' s'en iront d'eux-mêmes et les termes restans donneront $y = \frac{f'' x}{F'' x}$. comme plus haut.

Si la même supposition de $x = a$ donnait encore $f'' x = 0$ et $F'' x = 0$, on trouverait de la même manière $y = \frac{f''' x}{F''' x}$; et ainsi de suite.

D'où résulte cette règle générale que lorsque la

numérateur et le dénominateur d'une fonction de x deviennent nuls à la fois pour une valeur donnée de x, il faudra prendre à leur place les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, jusqu'à ce qu'on arrive à une fraction qui ait une valeur déterminée pour la même supposition de x.

On sait que la formule $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$ donne la somme de la progression géometrique $x + x^2 + x^3 + \text{etc}, + x^n$.

Lorsque $x = 1$, cette formule devient $\frac{0}{0}$; on prendra donc les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, on aura la nouvelle fraction $\frac{1 - (n+1)x^n}{-1}$ dont la valeur, lorsque $x = 1$, est n.

Si on prend la fonction dérivée de la formule $\frac{x - x^{n+1}}{1 - x}$, on a $\frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}$, et celle-ci exprime par conséquent la somme de la série $1 + 2x + 3x^2 + \text{etc}, + n x^{n-1}$ qui est la fonction dérivée de la série $x + x^2 + x^3 + \text{etc}, + x^n$.

Lorsque $x = 1$ la formule précédente devient $= \frac{0}{0}$, on prendra donc les fonctions dérivées du

numérateur et du dénominateur, et l'on aura la nouvelle fraction $\frac{-n(n+1)x^{n-1}+n(n)+1)x^n}{-2(1-x)}$,

qui en faisant $x=1$ devient de nouveau $\frac{0}{0}$. On prendra de rechef les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, de cette dernière fraction, et l'on aura celle-ci

$$\frac{-n(n+1)(n-1)x^{n-2}+n^2(n+1)x^{n-1}}{2}$$

laquelle lorsque $x=1$ devient

$$\frac{-n(n+1)(n-1)+n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

somme de la série $1+2+3+$ etc ; $+n$.

On pourrait craindre qu'en prenant ainsi les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, on n'eut toujours des fonctions qui devinssent égales à zéro divisé par zéro pour la même valeur de x. Mais il est aisé de se convaincre que cela ne saurait avoir lieu. Car si $x=a$ faisait évanouir les fonctions $fx, f'x, f''x$ etc., à l'infini, puisqu'on a en général $f(x+i)=fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc, on aurait, lorsque $x=a, f(a+i)=0$ quelque soit i,

ce qui est impossible. Il en serait de même de $F(x+i)$.

Il peut néanmoins arriver que ces fonctions deviennent à la fois infinies par la même supposition de $x = a$, ce qui rendrait également indéterminées les valeurs des fractions $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{f'x}{F'x}$ etc ; mais ce cas rentre alors dans le cas général que nous avons examiné plus haut, et il en faudra conclure que le développement des fonctions $f(x+i)$ et $F(x+i)$ contiendra alors des puissances de i fractionnaires ou négatives.

On substituera donc $a+i$ à la place de x tant dans la fonction du numérateur, que dans celle du dénominateur, et l'on résoudra l'une et l'autre en série suivant les puissances ascendantes de i ; on fera ensuite $i = 0$ après avoir divisé le haut et le bas de la fraction par la plus haute puissance de i ; ou ce qui revient au même, on n'aura d'abord égard qu'au premier terme de chacune des deux séries.

Soit par exemple la fraction

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{(x-a)}}{\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

dont on demande la valeur, lorsque $x = a$. On voit d'abord que cette supposition rend le numérateur et le dénominateur nuls. Leurs fonctions dé-

rivées sont $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{(a-x)}}$ et $\frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$ qui deviennent l'une et l'autre infinies par la même supposition. On fera donc $x = a + i$, et la fonction du numérateur deviendra $\sqrt{(a+i)} - \sqrt{a} + \sqrt{i} = \sqrt{i} + \frac{i}{2\sqrt{a}}$ etc ; la fonction du dénominateur deviendra $\sqrt{i}(2a+i) = \sqrt{2ai} + \frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2a}}$ + etc, en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes de i. En ne prenant que les deux premiers, on aura la fraction $\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2ai}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, pour la valeur cherchée.

En général une fonction de x ne peut devenir nulle lorsque $x = a$, à moins qu'elle ne contienne un facteur $(x-a,)^m$, m étant positif quelconque. Donc si deux fonctions de x deviennent nulles par la même supposition, il faudra qu'elles contiennent chacune un pareil facteur ; et pour trouver alors la valeur de la fraction formée de ces deux fonctions, il ne s'agira que de la réduire à sa plus simple expression en la dégageant du facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Si donc on fait $x = a + i$, ce qui donne $x - a = i$, le facteur commun sera une puissance de i qui s'évanouira par la division et alors il n'y aura plus qu'à faire $i = 0$ pour avoir $x = a$.

Ainsi ayant la fraction $\frac{fx}{Fx}$ la substitution de $a+i$ au lieu de x donnera d'abord en général

$$\frac{fa + if'a + \frac{i^2}{2}f''a + \text{etc.}}{Fa + iF'a + \frac{i^2}{2}F''a + \text{etc.}}$$

Si $fa = o$, et $Fa = o$, le haut et le bas de la fraction seront divisibles par i, et elle deviendra

$$\frac{f'a + \frac{i}{2}f''a + \text{etc.}}{F'a + \frac{i}{2}F''a + \text{etc.}}$$

Faisant ensuite $i = o$ pour avoir $x = a$, on aura $\frac{f'a}{F'a}$ pour la valeur de la fraction proposée, lorsque $x = a$.

Si $f'a = o$ et $F'a = o$, la fraction se réduira encore, et deviendra par une nouvelle division par i

$$\frac{\frac{1}{2}f''a + \frac{i}{2\cdot 3}f'''a + \text{etc.}}{\frac{1}{2}F''a + \frac{i}{2\cdot 3}F'''a + \text{etc.}}$$

laquelle en faisant $i = o$ se réduit à $\frac{f^{m} a}{F^{m} a}$; et ainsi de suite.

On voit par-là la raison de la règle générale donnée plus haut, et on voit en même tems que cette règle n'est bonne que par les fractions dont le numérateur et le dénominateur contiennent à la fois un facteur de la forme $(x - a)^{m}$, m étant un nombre entier positif. Aussi peut-on toujours résoudre ces cas en faisant disparaître ce facteur par les règles connues pour réduire la fraction à sa plus simple expression.

Dans les autres cas où n serait un nombre fractionnaire, la règle sera en défaut, et il faudra alors réduire les deux fonctions $f(a + i)$ et $F(a + i)$ dans les séries

$\alpha i^{m} + \beta i^{m+n} + \text{etc}$; et $A i^{m} + B i^{m+p} + \text{etc}$,

de sorte que l'on aura

$$\frac{f(a + i)}{F(a + i)} = \frac{\alpha + \beta i^{n} + \text{etc.}}{A + B i^{p} + \text{etc}},$$

et faisant $i = o$, $\frac{f a}{F a} = \frac{\alpha}{A}$.

Mais par ce que nous avons demontré plus haut, on est assuré que ces cas n'auront lieu que lorsque les valeurs des fonctions dérivées de fx et de Fx deviendront infinies en même tems par la supposition de $x = a$.

L'analise que nous venons de donner est nécessaire pour ne rien laisser à desirer sur la nature des fonctions

[illegible], mais comme elle ne regarde que la [illegible] des fonctions dans des cas particuliers, elle n'influe point sur la théorie générale des fonctions, en tant qu'on n'y considère que la forme et la dérivation des fonctions, laquelle est par conséquent indépendante des exceptions que nous avons trouvées.

LEÇON NEUVIÈME.

De la manière d'avoir les limites du développement d'une fonction lorsqu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé de termes. Cas dans lesquels les principes du calcul différentiel sont en défaut.

Toute fonction $f(x+i)$ se développe ainsi qu'on l'a vu dans la série $fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \frac{i^3}{2.3}f'''x$ + etc ; laquelle va naturellement à l'infini, à moins que les fonctions dérivées de fx ne deviennent nulles, ce qui a lieu lorsque fx est une fonction rationelle et entière de x.

Tant que ce développement ne sert qu'à la génération des fonctions dérivées, il est indifférent que la série aille à l'infini ou non ; il l'est aussi lorsqu'on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction ; mais si on veut l'employer pour avoir la valeur de la fonction dans les cas particuliers, comme offrant une expression d'une forme plus simple à raison de la quantité i qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors ne pouvant tenir compte que d'un certain nombre plus ou moins grand de termes il est important d'avoir un moyen d'évaluer le reste de la série qu'on néglige, ou du moins de trouver des limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste.

La détermination de ces limites est sur-tout d'une grande importance dans l'application de la théorie des

pour pouvoir donner à cette application la rigueur de l'ancienne géométrie, comme on le voit dans la seconde partie de la *Théorie des fonctions analytiques*.

Dans la solution que j'ai donnée de ce problème dans l'ouvrage cité, j'ai commencé par chercher l'expression exacte du reste de la série, ensuite j'ai déterminé les limites de cette expression. Mais on peut trouver immédiatement ces limites d'une manière plus élémentaire, et également rigoureuse.

Nous allons pour cela établir ce principe général qui peut être utile dans plusieurs occasions.

Une fonction qui est nulle lorsque la variable est nulle, a nécessairement depuis l'origine de la variable des valeurs finies et constamment positives ou négatives, tant que sa fonction dérivée est finie et toujours positive ou négative.

Ce principe est très-important dans la théorie des fonctions, parce qu'il établit une relation générale entre l'état des fonctions primitives et celui des fonctions dérivées, et qu'il sert à déterminer les limites des fonctions dont on ne connaît que les dérivées.

Nous allons le démontrer d'une manière rigoureuse.

Considérons la fonction $f(x+i)$, dont le développement général est $fx+if'x+\frac{i^2}{2}f''x+$ etc.

Nous avons vu dans la leçon précédente que la forme du développement peut être différente pour des valeurs particulières de x ; mais que tant que $f'x$ ne sera pas infinie, les deux premiers termes de ce développement seront exacts, et que les autres contiendront par conséquent des puissances de i plus hautes que la première, de manière qu'on aura

$$f(x+i) = fx + i(f'x + V),$$

V étant une fonction de x et i telle qu'elle devienne nulle lorsque $i = 0$.

Donc puisque V devient nul lorsque i devient nul, il est clair qu'en faisant croître i par degrés insensibles depuis zéro, la valeur de V croîtra aussi insensiblement depuis zéro, soit en plus ou en moins, jusqu'à un certain point, après quoi elle pourra diminuer, que par conséquent on pourra toujours donner à i une valeur telle que la valeur correspondante de V, abstraction faite du signe, soit moindre qu'une quantité donnée, et que pour les valeurs moindres de i la valeur de V soit aussi moindre.

Soit D une quantité donnée qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra, on pourra donc toujours donner à i une valeur assez petite pour que la valeur de V soit renfermée entre les limites D et $-D$; donc puisqu'on a $f(x+i) - fx = i(f'x + V)$ il s'ensuit que la quantité $f(x+i) - fx$ sera renfermée entre ces deux-ci $i(f'x \pm D)$.

Comme cette conclusion a lieu quelle que soit la va-

leur de x pourvu que $f'x$ ne soit pas infinie, elle subsistera aussi en mettant successivement $x+i$, $x+2i$, $x+3i$ etc, jusqu'à $x+(n-i)i$ à la place de x; de sorte qu'on pourra toujours prendre i positif et assez petit pour que les valeurs des quantités

$$f(x+i)-fx$$
$$f(x+2i)-f(x+i)$$
$$f(x+3i)-f(x+2i), \text{ etc.}$$
$$f(x+ni)-f(x+(n-1)i)$$

soient renfermées respectivement entre les limites $i(f'x \pm D)$, $i(f'(x+i) \pm D)$, $i(f'(x+2i) \pm D)$, etc. $i(f'(x+(n-1)i) \pm D)$, en prenant pour D la même quantité dans chacune de ces limites, ce qui est permis; pourvu qu'aucune des quantités $f'x$, $f'(x+i)$, $f'(x+2i)$ etc, jusqu'à $f'(x+(n-1)i)$ ne soit infinie.

Donc si toutes ces dernières quantités sont de même signe, c'est à-dire, toutes positives ou toutes négatives, il est facile d'en conclure que la somme des quantités précédentes laquelle se réduit à $f(x+ni)-fx$, aura pour limites la somme des limites, c'est-à-dire les quantités

$$if'x + if'(x+i) + if'(x+2i) + \text{ etc.}$$
$$+ if'(x+(n-1)i) \pm nD.$$

Si donc on prend la quantité arbitraire D moindre que la somme de $f'x+f'(n+i)+f'(x+2i)$ + etc. $+f'(x+(n-1)i)$ divisée par n, abstraction faite du signe de cette somme, la quantité $f(x+ni)-fx$ sera nécessairement renfermée entre zéro et la somme

$$2i\,(f'x+f'(x+i)+f'(x+2i)+\text{etc.}\\ +f'(x+(n-1)i).$$

Donc si P est la plus grande valeur positive ou négative des quantités $f'x$, $f'(x+i)$ etc. jusqu'à $f'(x+(n-1)i)$, la quantité $f(x+ni)-fx$ sera à plus forte raison renfermée entre zéro et $2ni\,P$.

Or comme en prenant i aussi petit q'on voudra, on peut en même tems prendre n aussi grand qu'on voudra, on pourra supposer $i\,n$ égale à une quantité quelconque z positive ou négative, puisque la quantité i peut être prise positivement ou négativement.

La quantité $f(x+ni)-fx$ deviendra ainsi $f(x+z)-fx$, et pourra représenter une fonction quelconque de z qui s'évanouit lorsque $z=0$, la quantité x pouvant maintenant être regardée comme une constante arbitraire. De même la quantité $f'(x+ni)$ deviendra $f'(x+z)$ et représentera la fonction dérivée de la même fonction de z, puisque $f'(x+z)$ est également la fonction dérivée de $f(x+z)$ soit par rapport à x soit par rapport à z.

On peut donc conclure en général que si $f'(x+z)$ a constamment des valeurs finies et de même signe depuis $z=0$, et que P soit la plus grande de ces valeurs, abstraction faite du signe, la fonction primitive dont il s'agit sera renfermée entre 0 et $2zP$, par conséquent elle aura toujours aussi des valeurs finies et de même signe que la fonction dérivée si z est positive, ou de signe différent, si z est négative.

Dans le calcul différentiel la conclusion précédente est une suite immédiate et nécessaire de la manière dont ce calcul est envisagé, et elle se présente même sans aucune limitation relativement aux valeurs infinies; mais nous allons voir qu'elle est souvent en défaut à cet égard, ce qui servira à montrer la nécessité d'une analise plus rigoureuse que celle qui sert de base au calcul différentiel.

En effet, si y est une fonction de z, sa fonction dérivée suivant la notation de ce calcul, sera représentée par $\frac{dy}{dz}$, et y, intégrale de dy, est regardé, par les principes mêmes du calcul, comme la somme de tous les élémens infiniment petits dy, ou $\frac{dy}{dz}dz$; par conséquent si $y = 0$, lorsque $z = 0$, y sera la somme de tous les élémens $\frac{dy}{dz}$ dz qui répondent à tous les élémens de z. D'où l'on est en droit de conclure que si $\frac{dy}{dz}$ a toujours des valeurs positives, depuis $z = 0$, jusqu'à une valeur quelconque positive de z, tous les élémens $\frac{dy}{dz}dz$ étant positifs, la valeur de y répondant à cette valeur de z sera nécessairement positive.

Cependant, si l'on a par exemple $y = \frac{1}{a-z}$ —

$\frac{1}{a}$, a étant une constante quelconque positive, on aura $y = 0$ lorsque $z = 0$, et la valeur de $\frac{dy}{dz}$ sera par les régles connues de la différentiation $\frac{1}{(a-z)^2}$. Cette valeur est constamment positive, quelle que soit la valeur de z; il faudrait donc que la valeur de y fût toujours positive; ce qui n'est pas, car en prenant z plus grande que a, y devient négative. Ainsi les principes du calcul différentiel sont en défaut dans ce cas.

Suivant le principe que nous venons d'établir, la valeur de y ne sera nécessairement positive qu'autant que la fonction dérivée $\frac{dy}{dz}$ ne sera pas infinie dans l'étendue de la valeur de z. Or $\frac{dy}{dz}$ étant égale à $\frac{1}{(a-z)^2}$, elle devient infinie, lorsque $z = a$. Donc les valeurs de y seront nécessairement positives, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = a$; mais elles pourront ne pas l'être lorsque $z > a$, quoique les fonctions dérivées $\frac{1}{(a-z)^2}$ soient toujours positives.

Voici maintenant comment le principe dont il s'agit

s'agit, s'applique à la détermination des limites du développement de $f(x+i)$.

Soient d'abord p et q les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction dérivée $f'(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en regardant x comme donné, et faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur quelconque donnée de i. Donc $f'p$ sera la plus petite valeur de $f'(x+i)$ et $f'q$ en sera la plus grande; par conséquent $f'(x+i)-f'p$, et $f'q-f'(x+i)$ seront toujours des quantités positives.

Regardant ces deux quantités comme des fonctions dérivées, relatives à la variable i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=o$ seront, à cause de x, p et q, supposées constantes,

$$f(x+i)-fx-if'p, \text{ et}$$
$$if'q-f(x+i)+fx.$$

Ainsi pourvu que $f'(x+i)$ ne soit jamais infinie depuis $i=o$ jusqu'à la valeur donnée de i, ce qui aura lieu si $f'p$ et $f'q$ ne sont point des quantités infinies, on aura par le principe précédent, si i est positif

$$f(x+i)-fx-if'p>o, \text{ et}$$
$$fx-f(x+i)+if'q>o;$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>fx+if'p, \text{ et}$$
$$f(x+i)<fx+if'q.$$

Supposons ensuite que p et q soient les valeurs de $x + i$ qui rendent la fonction dérivée du second ordre $f''(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur donnée. On aura $f''p$ et $f''q$ pour la plus petite et la plus grande valeur de $f''(x+i)$; par conséquent $f''(x+i) - f''p$, et $f''q - f''(x+i)$ seront toujours des quantités positives.

Regardant ces quantités comme des fonctions dérivées, relatives à la variable i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles, lorsque $i = 0$ seront

$$f'(x+i) - f'x - if''p, \text{ et}$$
$$if''q - f'(x+i) + f'x.$$

Donc, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de i, ce qui revient à ce que $f''p$ et $f''q$ ne soient point infinies, ces deux quantités seront, par le même principe, toujours positives et finies, i étant supposé positif ; et en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i = 0$ seront, à cause de x, p et q supposées constantes,

$$f(x+i) - fx - if'x - \frac{i^2}{2}f''p$$

$$\frac{i^2}{2}f''q - f(x+i) + fx + if'x.$$

Ces nouvelles quantités seront donc aussi par le même principe toujours positives ; on aura ainsi

$$f(x+i) - fx - if'x - \frac{i^2}{2} f''p > 0,$$

$$fx - f(x+i) + if'x + \frac{i^2}{2} f''q > 0,$$

d'où l'on tire

$$f(x+i) > fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''p \text{ et}$$

$$f(x+i) < fx + ifx' + \frac{i^2}{2} f''q.$$

Si on suppose en troisième lieu que p et q soient les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction tierce $f'''(x+i)$ la plus petite et la plus grande, depuis $i = o$ jusqu'à une valeur donnée de i, on aura les deux quantités $f'''(x+i) - f'''p$ et $f'''q - f'''(x+i)$ qui seront nécessairement positives dans toute l'étendue de i. Donc en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles, lorsque $= o$ seront,

$$f''(x+i) - f''x - if'''p \text{ et}$$

$$if'''q - f''(x+i) + f''x.$$

Et ces quantités seront par le même principe toujours positives et finies, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de i,

c'est-à-dire pourvu que $f''' p$ et $f''' q$ ne soient point infinies.

Donc en regardant de nouveau ces dernières quantités comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i = o$, seront

$$f'(x+i) - f'x - if''x - \frac{i^2}{2} f''' p, \text{ et}$$

$$\frac{i^2}{2} f''' q - f'(x+i) + f'x + if''x,$$

lesquelles seront par conséquent aussi toujours positives et finies, en vertu du même principe.

Enfin regardant encore ces nouvelles quantités comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i = o$, seront

$$f(x+i) - fx - if'x - \frac{i^2}{2} f''x - \frac{i^3}{2.3} f''' p, \text{ et}$$

$$\frac{i^3}{2.3} f''' q - f(x+i) + fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x.$$

Ces quantités seront donc encore positives par le même principe ; ainsi on aura

$$f(x+i) - fx - if'x - \frac{i^2}{2} f''x - \frac{i^3}{2.3} f''' p > 0$$

$$fx - f(x+i) + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''q > 0$$

d'où l'on tire

$$f(x+i) > fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''p,$$

$$f(x+i) < fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \frac{i^3}{2.3} f'''q.$$

Et ainsi de suite.

Nous avons supposé dans ces développemens i positif; si i était négatif, ou bien si on changeait i en $-i$, alors on trouverait pour premieres limites de $f(x-i)$,

$$f(x-i) < fx - if'p$$

$$f(x-i) > f - if'q.$$

On trouverait ensuite pour secondes limites

$$f(x-i) < fx - if'x + \frac{i^2}{2} f''p$$

$$f(x-i) > fx - if'x + \frac{i^2}{2} f''q$$

Et ainsi des autres.

Donc en général la quantité $f(x+i)$, soit que i soit positif ou négatif, sera toujours renfermée entre ces deux-ci

$$fx + i f' x + \frac{i^2}{2} f'' x + \frac{i^3}{2.3} f''' x + \text{etc.}$$

$$+ \frac{i^\mu}{2.3...\mu} f^\mu p$$

$$fx + i f' x + \frac{i^2}{2} f'' x + \frac{i^3}{2.3.} f''' x + \text{etc.}$$

$$+ \frac{i^\mu}{2.3...\mu} f^\mu q,$$

en prenant pour p et q les valeurs de $x + i$ qui répondent à la plus petite et à la plus grande des valeurs de $f^\mu(x+i)$ dans toute l'étendue de i depuis $i = o$; pourvu que les deux quantités $f^\mu p$ et $f^\mu q$ ne soient pas infinies.

Au reste il est facile de voir par l'analise précédente qu'on n'est pas astreint à prendre pour $f^\mu p$ et $f^\mu q$ la plus petite et la plus grande valeur de $f^\mu(x+i)$, mais qu'on peut prendre à leur place des valeurs quelconques plus petites que la plus petite, et plus grande que la plus grande; ce qui peut servir dans nombre de cas à faciliterbeaucoup la détermination des limites.

J'observerai ici, quoique cela ne soit presque pas nécessaire, que j'entends toujours par quantités plus grandes ou plus petites absolument, celles qui sont plus avancées vers l'infini positif, ou vers l'infini négatif; ainsi si $a > b$ on aura $-a < -b$; etc.

L'analise précédente redonne comme l'on voit successivement les termes du développement de $f(x+i)$; mais elle a l'avantage de ne développer cette fonction qu'autant que l'on veut, et d'offrir des limites du reste.

En effet si dans le développement de $f(x+i)$ on veut s'arrêter au terme $\mu^{ème}$, pour avoir les limites du reste du développement il n'y a qu'à considérer le terme suivant qui serait de la forme

$$\frac{i^{\mu}}{1.\ 2.\ 3.\ 4 \ldots\ \mu} f^{\mu} x,$$

et y mettre à la place de $f^{\mu} x$ la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}(x+i)$ en faisant varier i depuis zéro, ou bien des quantités quelconques plus grandes ou plus petites que la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}(x+i)$. Si ces deux valeurs ou l'une d'entr'elles était infinie, il n'y aurait point alors de limites ; c'est aussi le cas ou le développement deviendroit fautif parce que la valeur de $f^{\mu}(x+i)$ serait infinie dans quelque point.

En général on peut avoir de la même manière les limites des valeurs de toute fonction, dont on ne connoitra que la fonction dérivée d'un ordre quelconque. On examinera la marche de la fonction dérivée depuis l'origine de la variable, et si elle ne devient jamais infinie on y appliquera immédiatement les formules précédentes où i est la variable et

x peut-être une constante quelconque. Si au contraire la fonction dérivée devient infinie pour certaines valeurs de la variable, on partagera cette variable en autant de parties séparées par les termes auxquels répondent les valeurs infinies de la fonction et on appliquera séparément les mêmes formules à chacune de ces parties.

Supposons $f(x+i)=(x+i)^m$ on aura $fx=x^m$ et de là $f'x=mx^{m-1}$, $f''x=m(m-1)x^{m-2}$ $f'''x=m(m-1)(m-2)x^{m-3}$ etc. : et en général $f^{\mu}x=Mx^{m-\mu}$ ou $M=m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu)$ comme on l'a vu dans la leçon II. On aura donc $f^{\mu}(x+i)=M(x+i)^{m-\mu}$, où l'on voit que cette fonction ne peut jamais devenir infinie tant que $x+i$ n'est pas $=o$, et que μ n'est pas $>m$. On voit aussi que la plus petite et la plus grande valeur de $M(x+i)^{m-\mu}$ répondent l'une à $i=o$ et l'autre à i ; de sorte que les valeurs de p et q seront x et $x+i$, ou $x+i$ et x suivant que i sera positive ou négative et $\mu>$ ou $<m$.

Donc en général le développement de $(x+i)^m$ sera compris entre ces deux limites

$$x^m+m.i.x^{m-1}+\frac{m(\mu-1)}{2}i^2x^{m-2}+\text{etc}$$

$$+\frac{Mi^{\mu}}{2.3\ldots\mu}x^{m-\mu}$$

$$x^m + m\,i\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\,i^2\,x^{m-2} + \text{etc}$$

$$+ \frac{M\,i^\mu}{2.\,3\ldots\,\mu}\,(x+i)^{m-\mu}$$

Par le moyen de ces limites on est à couvert des difficultés qui peuvent résulter de la non-convergence de la série ; car comme un terme quelconque $n^{ième}$ est au suivant dans le rapport de 1 à $\frac{m-n+1}{n} \times \frac{i}{x}$, pour que la série soit convergente il faut que la quantité $\frac{m-n+1}{n} \times \frac{i}{x}$ abstration faite du signe qu'elle doit avoir) soit moindre que l'unité. Si $\frac{i}{x} < 1$, il est clair que la série finira toujours par être convergente puisque la dernière valeur de $\frac{m-n+1}{n}$ est l'unité. Mais elle sera toujours divergente à son extrémité, si $\frac{i}{x} > 1$, quoiqu'elle puisse être convergente dans ses premiers termes. Ainsi elle ne pourra alors être employée avec sureté quelque loin qu'elle soit portée qu'en ayant égard aux limites que nous venons de donner.

Supposons en second lieu $f(x+i) = a^{x+i}$ on aura $fx = a^x$, et de là $f'x = a^x la$, $f''x = a^x (la)^2$ $fx''' = a^x (la)^3$ etc. Donc en général, $f^{\mu}(x+i) = a^{x \pm i} (la)^{\mu}$, où l'on voit que la plus petite et la plus grande valeur répondent aussi à $i = o$ et à i. Ainsi on aura, en faisant $x = o$,

$$1 + i\,la \pm \frac{i^2}{2} (la)^2 + \frac{i^3}{2.3} (la)^3 + \text{etc.}$$

$$+ \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} (la)^{\mu}$$

$$1 + i\,la + \frac{i^2}{2} (la)^2 + \frac{i^3}{2.3} (la)^3 + \text{etc}$$

$$+ \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} (la)^{\mu} a^i$$

pour les limites de la valeur de a^i, où l'on pourra prendre dans le dernier terme au lieu de a^i une quantité quelconque plus grande.

Soit en troisième lieu $f(x+i) = l(x+i)$, on aura $fx = lx$, $f'x = \frac{1}{x}$, $f''x = -\frac{1}{x^2}$

$f''' = \frac{2}{x^3}$ etc

donc $f^{\mu}(x+i) = \pm \frac{2.3\ldots\mu - 1}{(x+i)^{\mu}}$

le signe supérieur étant pour le cas de μ impair, et l'inférieur pour le cas de μ pair.

Il est clair que pourvu que $x + i$ ne soit pas égal à zéro la valeur $f^{\omega}(x+i)$ ne sera jamais infinie, et que sa plus petite et sa plus grande valeur relativement à i répondront à $i = o$ et à i.

On aura donc par la formule générale ces deux limites pour la valeur de $l(x+i)$

$$lx + \frac{i}{x} - \frac{i^2}{2x^2} \pm \frac{i^3}{3x^3} - \text{etc}, \pm \frac{i^{\mu}}{\mu x^{\mu}}$$

$$l\,x + \frac{i}{x} - \frac{i^2}{2x^2} + \frac{i^3}{3x^3} - \text{etc}, \pm \frac{i^{\omega}}{\mu(x+i)^{\mu}}$$

où l'on pourra mettre à la place de i une valeur quelconque plus grande dans $(x+i)^{\mu}$.

Soit en quatrième lieu $f(x+i) = sin(x+i)$, on aura $fx = sin\,x$, $f'x = cos\,x$, $f''x = -sin\,x$ etc. donc en général $f^{\mu}(x+1) = \pm sin(x+i)$ ou $= \pm cos(x+i)$ suivant que μ sera de l'une de ces formes $4n$, $4n-2$, $4n+1$, $4n+3$, n étant un nombre entier quelconque, ce qu'on peut renfermer dans cette expression générale

$$f^{\mu}(x+i) = sin\left(x + i + \mu \overset{\frown}{D}\right)$$

D étant l'angle droit.

Or quelles que soient les valeurs de x et i, il est visible que la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}(x+i)$ sera 1 et -1 ; ainsi on aura pour le développement de $sin\,(x+i)$ ces limites

$$sin\,x + i\,cos\,x - \frac{i^2}{2}\,sin\,x - \frac{i^3}{2.3}\,cos\,x + \text{etc},$$

$$\pm\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}$$

Si on fait $x = 0$ on aura

$$i - \frac{i^3}{2.3} \pm \frac{i^5}{2.3.4.5} - \text{etc}, \pm \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}$$

Et si on fait $x = D$, on aura,

$$1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \text{etc} ; \pm \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}$$

pour les limites de $sin\,i$ et $cos\,i$, où il faudra prendre pour μ le nombre immédiatement plus grand d'une unité que l'exposant de i dans le terme auquel on voudra s'arrêter.

Nous avons donné à la fin de la leçon VII, la série du développement de $f(y+i)$ en supposant $y = \text{tang.}\,x$ et $\varphi = fy$, et nous avons trouvé en général

$$f^{\mu} y = \pm 2 . 3 \ldots (\mu - 1) \cos z^{\mu} \times \sin. \text{ ou } \cos. \mu x.$$

Donc on aura aussi

$$f^{\mu} (y + i) = \pm 2 . 3 \ldots (\mu - 1) \cos z^{\mu} \times \sin \text{ ou } \cos \mu z$$

en faisant $y + i =$ tang. z et par conséquent $z =$ arc. (tang. $x + i$).

Or quelque soient y et i il est visible que la petite et la plus grande valeur de $\cos z^{\mu} \times \sin$ ou $\cos. \mu z$ sera -1 et 1 ; d'où on peut d'abord conclure que la série est vraie pour des valeurs quelconques de x et i ; et que si on veut arrêter la série au terme $\mu^{ième}$, le reste de la série sera nécessairement renfermé entre les limites $\pm \frac{i^{\mu}}{\mu}$

Ainsi en faisant $x = 0$, on aura

$$arc. \text{ tang } i = i - \frac{i^3}{2} + \frac{i^5}{5} + \text{ etc. :}$$

Et si μ est l'exposant du terme auquel on veut s'arrêter, on aura $\pm \frac{i^{\mu+1}}{\mu + 1}$ pour les limites du reste

Nous finirons par remarquer que les mêmes formules peuvent servir à développer une fonction quel-

conque suivant les puissances de sa variable ; car en faisant $x = o$, $f(x + i)$ devient simplement $f i$ et peut représenter une fonction quelconque d'une variable i.

Or il est visible que les valeurs de fx, $f'x$, $f''x$ etc. lorsque $x = o$ doivent coïncider avec celles de fi, $f'i$, $f''i$ etc, lorsque $i = o$.

Donc si on change i en x, et qu'on dénote simplement par f, f', f'' etc. les valeurs de fx, $f'x$, $f''x$ etc, lorsque $x = o$, on aura en général

$$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + \frac{x^3}{2.3}f''' + \text{etc.}$$

Et si on veut s'arrêter au terme $\mu^{ème}$, alors comme le terme suivant serait

$$\frac{x^\mu}{2.3.4....\mu} f^\mu$$

il n'y aura qu'à substituer à la place de f^μ la plus grande et la plus petite valeur de $f^\mu x$, ou des valeurs plus grandes et plus petites que celles-ci, et l'on aura les limites du reste du développement.

Ainsi le développement sera exact tant que ces limites auront des valeurs finies. Si l'une d'elles devenait infinie, le reste de la série pourrait aussi devenir

infini, et le développement deviendrait fautif. Il faudra donc alors ou s'arrêter à un terme précédent, ou n'attribuer à x que des valeurs telles que $f^{(n)} x$ ne devienne pas infinie depuis $x = o$ jusqu'à cette valeur.

LEÇON DIXIÈME.

Des équations dérivées, et de leur usage pour la transformation des fonctions. Analise des sections angulaires.

Jusqu'à présent nous n'avons consideré les fonctions dérivées que comme servant à la formation des séries, d'où elles tirent leur origine; mais ces fonctions considérées en elles-mêmes offrent un nouveau sistême d'opérations algebriques et sont pour ainsi dire la clef de la tranformation des fonctions.

Lorsqu'une fonction d'une variable est présentée sous deux formes différentes, en égalant ces deux expressions, on a ce qu'on appelle une *équation identique*, à cause de l'identité de la valeur, laquelle doit par conséquent avoir lieu indépendamment de la variable, c'est-à-dire quelle que soit cette variable; ainsi elle aura lieu aussi en attribuant à la variableun accroissement quelconque i.

Soit $fx = o$ une pareille équation identique, on aura donc aussi $f(x+i) = o$, savoir en développant

$$fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \text{etc} = o$$

quel que soit i; donc on aura séparement

$$fx = o, f'x = o, f''x = o \text{ etc};$$

d'où

d'où il suit que l'on aura la même équation en prenant les fonctions derivées d'un ordre quelconque.

Supposons maintenant une équation comme $F(x, y) = o$ entre deux variables x et y par laquelle l'une y doive être fonction de x. Il est évident qu'en régardant y comme une fonction de x déterminée par cette équation, l'équation $F(x, y) = o$ sera identique, et aura lieu independamment de x; donc l'équation subsistera aussi entre les fonctions dérivées d'un ordre quelconque.

En prenant donc les fonctions dérivées premières, secondes etc de chaque terme, on aura autant de nouvelles équations qui auront lieu en même tems que l'équation primitive, par conséquent toute combinaison de ces équations aura lieu aussi à la fois.

Nous nommerons en général *équations dérivées du premier ordre*, *du second ordre etc*, *ou simplement équations primes*, *secondes etc*, non seulement les équations dérivées qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes etc, de tous les termes d'une équation régardée comme primitive, mais encore les équations qu'on pourra former par une combinaison quelconque de l'équation primitive, et de son équation prime, ou de ces deux-ci et de l'équation seconde.

Ainsi l'équation primitive contenant x et y, l'é-

quation dérivée du premier ordre ou équation prime contiendra x, y et y', l'équation dérivée du second ordre ou équation seconde contiendra x, y, y' et y''; et ainsi de suite.

Si au lieu de regarder y comme fonction de x on regardait au contraire x comme fonction de y, l'équation prime serait entre y, x et x', l'équation seconde sereit entre y, x, x' et x'', et ainsi de suite; et par le principe exposé dans la leçon VII, on pourra toujours tranformer un de ces sistêmes d'équations dérivées dans l'autre.

Pour montrer d'abord par quelques exemples l'usage des équations dérivées dans la transformation des fonctions, je considérerai les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ dont nous avons donné les fonctions dérivées dans la leçon V, et faisant $y = \sin x$, $z = \cos x$, j'aurai d'abord $y' = \cos x$ et $z' = -\sin x$, par conséquent $y' = z$, $z' = -y$; si on multiplie la première de ces équations par $\sqrt{-1}$, et qu'on l'ajoute à la seconde, on aura $z' + y'\sqrt{-1} = z\sqrt{-1} - y = (z + y\sqrt{-1})\sqrt{-1}$; d'où l'on tire l'équation

$$\frac{z' + y'\sqrt{-1}}{z + y\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$$

Or nous avons vu dans la leçon VI, que si p est une fonction quelconque de x, $\frac{p'}{p}$ est la fonction dérivée de lp; ainsi

$$l.(z + y\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1} + k$$

sera l'équation primitive d'où la précédente peut être censée dérivée ; la quantité k est la constante arbitraire que nous avons vu à la fin de la même leçon, pouvoir toujours s'ajouter à la fonction primitive d'une fonction dérivée donnée, et qui sert à lui donner toute la généralité dont elle est susceptible. Il serait inutile d'ajouter de même une constante au premier membre de l'équation, parce qu'elle se fondrait dans l'autre par la simple transposition dans le second membre.

Mais cette constante étant jusqu'ici arbitraire, il faut la déterminer conformement à la nature des fonctions y et z.

Pour cela j'observe qu'en faisant $x = 0$, on a $\sin x = 0$, et $\cos x = 1$; donc $y = 0$, $z = 1$. Il faudra donc que l'équation que nous venons de trouver, satisfasse à ces suppositions ; or elle devient dans ce cas $l\,1 = k$, et comme $l\,1$ est $= 0$ on aura $k = 0$.

L'équation sera donc simplement $l(z + y\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1}$; et passant de là aux exponentielles $z + y\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$, e étant, comme nous le supposons toujours, le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Remettant pour y et z leurs valeurs $\sin x$ et $\cos x$, on aura cette formule remarquable

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

laquelle à cause de l'ambiguité du radical $\sqrt{-1}$ donne également celle-ci

$$\cos x - \sin x \sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}},$$

Et ces deux combinées ensemble suffisent pour déterminer les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$. On aura en effet après les avoir ajoutées ou retranchées

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Ainsi les *sinus* et *cosinus* se trouvent exprimés par des exponentielles imaginaires, ce qu'on peut regarder comme l'une des plus belles découvertes analitiques qu'on ait faites dans ce siécle.

Ces formules peuvent aussi se déduire immmédiatement de la comparaison des séries qui expriment les fonctions $\sin x$ et $\cos x$ et a^x, et que nous avons données plus haut (leçon IV et VI); et il paraît que c'est de cette manière qu'Euler les a le premier trouvées, comme on les voit dans le tome VII des *Miscellanea Berolinensia*.

Comme ces mêmes séries avaient été donnée

par Neuwton dans son commerce avec Oldenburg, et étaient ainsi connues avant la fin du siècle dernier, on aurait pu des-lors parvenir aux formules dont nous parlons, et donner par là à la théorie des sections angulaires, la perfection qu'elle n'a acquise que cinquante ans après par les ouvrages d'Euler.

L'expression des arcs en logarithmes imaginaires remonte à la vérité au commencement de ce siècle, et c'est une des plus belles découvertes de Jean Bernoulli qui l'a donnée en peu de mots dans les mémoires de l'Académie des sciences de 1702. Il y était parvenu en intégrant par logarithmes l'élément de l'arc exprimé par la tangente, comme Leibnitz avait trouvé la serie qui exprime l'arc par la tangente en intégrant le même élément par série.

Cette découverte conduisait aussi naturellement aux mêmes formules, mais elle est restée longtems stérile, et ce n'est que lorsque ces formules ont été connues par d'autres voies qu'on a vu qu'on pouvait les tirer immédiatement de l'intégration.

L'équation $\cos x + \sin \sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}}$

où le radical $\sqrt{-1}$ peut avoir également le signe $+$ et $-$, donne toute la théorie du calcul des angles. Car en multipliant cette équation par l'équation semblable

$$\cos y + \sin y \sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}}$$

on a

$$(\cos x + \sin x \sqrt{-1})(\cos y + \sin y \sqrt{-1}) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Mais en mettant dans la même équation $x + y$ à la place de x on a aussi

$$\cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1} = e^{(x+y)\sqrt{-1}};$$

Donc comparant et développant le produit, on a

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y + (\cos x \sin y + \cos y \sin x) \times \sqrt{-1} = \cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1};$$

Et comme cette équation doit avoir lieu pour les deux signes de $\sqrt{-1}$, il s'ensuit qu'on aura séparément

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x+y),$$

$$\cos x \sin y + \sin x \cos y = \sin(x+y),$$

formules qu'on démontre par la géométrie, et qui sont le fondement de toute la théorie des angles.

La même équation en élevant les deux membres à une puissance quelconque m, donne

$$(x\cos + \sin x\sqrt{-1})^m = e^{mx\sqrt{-1}}$$

Donc aussi en mettant dans l'équation primitive mx à la place de x et comparant on a

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$

formule remarquable autant par sa simplicité et son élégance que par sa généralité et sa fécondité.

Il paraît que Moivre est le premier qui ait trouvé cette belle formule ; on voit par les *Miscellanea analitica* qu'il y a été conduit par la considération des sections hyperboliques comparées aux sections circulaires. Maintenant elle est devenue une vérité élémentaire qu'on qdémontre par le moyen des valeurs de $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$ que donne la géométrie, en considérant le produit des formules semblables $\cos x + \sin x\sqrt{-1}$ et $\cos y + \sin y\sqrt{-1}$; et c'est à Euler qu'on doit d'avoir transporté ainsi dans les élémens une formule d'une si grande utilité.

Il est vrai que de cette manière on ne peut la démontrer que pour des valeurs rationelles de m ; mais il en est ici comme dans la formule du développe-

ment du binome, et en général dans toutes les formules qui contiennent une indéterminée qui peut être un nombre quelconque rationel ; ce n'est que par la considération des fonctions dérivées qu'on en peut prouver la généralité pour une valeur quelconque de la même quantité.

En prenant dans la formule que nous venons de trouver le radical $\sqrt{-1}$ en plus et en moins, ou à ces deux-ci

$$\begin{aligned} &Cos\, m\, x + sin\, m\, x \sqrt{-1} \\ &= (cos\, x + sin\, x \sqrt{-1})^m, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Cos\, m\, x - sin\, m\, x \sqrt{-1} \\ &= (cos\, x - sin\, x \sqrt{-1})^m ; \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$Cos\, m\, x = \frac{(cos\, x + sin\, x \sqrt{-1})^m + (cos\, x - sin\, x \sqrt{-1})^m}{2},$$

$$Sin\, m\, x = \frac{(cos\, x + sin\, x \sqrt{-1})^m - (cos\, x - sin\, x \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$$

Si on développe les puissances m^{mes} par la formule du binome, les imaginaires disparaissent, et l'on a ces expressions en série

cos

$$\cos m\,x =$$

$$\cos x^m - \frac{m(m-1)}{2}\cos x^{m-2}\sin x^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4.}\cos x^{m-4}\sin x^4$$

— etc :

$$\sin m\,x =$$

$$m\cos x^{m-1}\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.}\cos x^{m-3}\sin x^3$$

+ etc ;

Ces deux formules ont été données dès 1701 par Jean Bernoulli, dans les actes de Léipsic, mais sans démonstration ; et on voit par la lettre 129 du *commercium epistolicum* et par le Traité des sections coniques de l'Hopital, qu'il les avait trouvées en cherchant successivement par les théorèmes connus, les valeurs des sinus et cosinus des angles doubles et triples etc., et observant l'analogie des termes de ces valeurs avec ceux du développement du binome. En effet si on fait successivement $y = x$, $2x$, $3x$ etc : dans les formules données ci dessus pour $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$, et qu'on substitue à mesure les valeurs précédentes on trouve

$$Cos\ 2\ x = cos\ x^2 - sin\ x^2$$

$$Sin\ 2\ x = 2\ cos\ x\ sin\ x$$

$$Cos\ 3\ x = cos\ x^3 - 3\ cos\ x\ sin\ x^2$$

$$Sin\ 3\ x = 3\ cos\ x^2\ sin\ x - sin\ x^3$$

etc :

dont l'analogie avec les termes des puissances correspondantes du binome est manifeste.

D'après cela il est étonnant que Jean Bernoulli n'ait pas trouvé les expressions finies de *sin m x* et *cos m x*, et qu'il ait fallu encore vingt ans pour qu'on parvint à la formule donnée par Moivre. Ainsi Jean Bernoulli a touché deux fois à la même découverte, et il en a laissé la gloire à ses successeurs.

Les formules précédentes renferment les puissances de *sin x* et *cos x* mêlées ensemble; comme l'on a toujours $cos\ x^2 + sin\ x^2 = 1$, il est possible de faire disparaître toutes les puissances paires de *sin x* ou de *cos x*, et avoir des formules qui procèdent suivant les puissances de *cos x* ou *sin x*.

Il serait difficile de parvenir à des séries régulières par la simple substitution, mais les formules connues

$$2\ cos\ x\ cos\ m\ x = cos\ (m+1)\ x + cos\ (m-1)\ x$$

$2 \cos x \sin m x = \sin (m+1) x + \sin (m-1) x$

font voir que les cosinus et sinus des multiples de x forment deux séries récurrentes dont l'échelle de relation est $2 \cos x, -1$.

Ainsi en partant des premières valeurs de $\cos m x$ et $\sin m x$ lorsque $m = 0$ et $m = 1$, et mettant pour plus de simplicité p et q à la place de $\cos x$ et $\sin x$ on trouvera successivement

$$\cos 0 x = 1$$

$$\cos x = p$$

$$\cos 2 x = 2 p \cos x - \cos 0 x = 2 p^2 - 1$$

$$\cos 3 x = 2 p \cos 2 x - \cos x = 4 p^3 - 3 p$$

etc.

d'où résulte la table suivante :

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = p \\ \cos 2 x = 2 p^2 - 1 \\ \cos 3 x = 4 p^3 - 3 p \\ \cos 4 x = 8 p^4 - 8 p^2 + 1 \\ \cos 5 x = 16 p^5 - 20 p^3 + 5 p \\ \text{etc,} \end{array}\right\} (A)$$

Et en général

$$2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \text{etc.}$$

On trouvera de même

$$\left.\begin{aligned} &\sin x = q \\ &\sin 2x = 2pq \\ &\sin 3x = (4p^2 - 1)q \\ &\sin 4x = (8p^3 - 4p)q \\ &\sin 5x = (16p^4 - 12p^2 + 1)q \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

etc.

Et en général

$$\sin mx = \left((2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \text{etc.}\right)q.$$

Ces séries procedent suivant les puissances descendantes de p ; on peut en avoir aussi qui procédent suivant les puissances ascendantes de p ou

de q; mais il faut alors distinguer les cas de m impair ou pair.

Soit 1°. m impair on aura

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = p \\ &\cos 3x = -(3p - 4p^3) \\ &\cos 5x = 5p - 20p^3 + 16p^5 \end{aligned}\right\} (C)$$

Et en général

$$\cos mx = \pm \left(mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3} p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5.} p^5 - \text{etc.} \right)$$

Le signe supérieur étant pour le cas où m est de la forme $4n+1$, et l'inférieur pour celui où m est de la forme $4n+3$.

On aura de même lorsque m est impair

$$\left.\begin{aligned} &\sin x = q \\ &\sin 3x = -q(1 + 4p^2) \\ &\sin 5x = q(1 - 12p^2 + 16p^4) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (D)$$

Et en général

$$\sin m x = \pm q \left(1 - \frac{m^2 - 1}{2} p^2 + \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)}{2.\ 3.\ 4} p^4 - \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9)(m^2 - 25)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} p^6 + \text{etc.}\right.$$

où l'on observera à l'égard des signes ambigus, la même règle que ci-dessus.

Soit 2^9 m pair on aura

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x &= -(1 - 2p^2) \\ \cos 4x &= 1 - 8p^2 + 8p^4 \\ \cos 6x &= -(1 - 18p^2 + 48p^4 - 32p^6) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (E)$$

Et en général

$$\cos m x = \pm \left(1 - \frac{m^2}{2} p^2 + \frac{m^2 (m^2 - 4)}{2.\ 3.\ 4} p^4 - \frac{m^2 (m^2 - 4)(m^2 - 16)}{2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} p^6 + \text{etc.}\right.$$

Ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\sin 2x = 2p \\ &\sin 4x = -q(4p - 8p^3) \\ &\sin 6x = q(6p - 32p^3 + 32p^5) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (F)$$

Et en général

$$\sin mx = \mp\left(mp - \frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc.}\right)q$$

A l'égard des signes ambigus, on prendra les signes supérieurs lorsque m est de la forme $4n$, et les inférieurs lorsque m est de la forme $4n+2$.

Enfin on aura aussi, à cause de $p^2 = 1 - q^2$,

1°. pour le cas de m impair

$$\left.\begin{aligned} &\cos x = p \\ &\cos 3x = p(1 - 4q^2) \\ &\cos 5x = p(1 - 12q^2 + 16q^4) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (G)$$

Et en général

$$\cos m x = p\left(1 - \frac{m^2-1}{2} q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}\right.$$

$$\left. - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6} q^6 + \text{etc.}\right)$$

Ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\sin x = q \\ &\sin 3x = 3q - 4q^3 \\ &\sin 5x = 5q - 20q^3 + 16q^5 \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} (H$$

Et en général

$$\sin m x = m q - \frac{m(m^2-1)}{2.3} q^3$$

$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5} q^5 - \text{etc.}$$

2°. Pour le cas de m pair

$$\left.\begin{aligned} &\cos 2x = 1 - 2q^2 \\ &\cos 4x = 1 - 8q^2 + 8q^4 \\ &\cos 6x = 1 - 18q^2 + 48q^4 - 32q^6 \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} (I$$

Et en général

$$\cos m\,x = 1 - \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}q^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}$$

Ensuite

$$\left.\begin{aligned} &\sin 2\,x = 2\,p\,q \\ &\sin 4\,x = p\,(4q - 8q^3) \\ &\sin 6\,x = p\,(6q - 32q^3 + 32q^5) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (K)$$

$$\sin m\,x = p\left(mq - \frac{m(m^2-4)}{2.3}q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}\right.$$

J'ai rapporté ici ces différentes formules parce que je ne connais aucun ouvrage où elles se trouvent réunies, et sur tout parce qu'elles nous fourniront l'occasion de faire plusieurs remarques, qui pourront intéresser les lecteurs.

Nous observerons d'abord que les formules des

tables (A), (B), (H) et (I) ont été trouvées par Viete et répondent à celles que l'on voit aux pages 295, 297 et 299 de ses œuvres imprimés à Léide en 1646. Il faut seulement observer que Viete a considéré les cordes plutôt que les sinus ou cosinus ; or $2\ cos\ x$ étant la corde du complément à la demi-périfërie de l'angle $2\ x$, $2\ cos\ 2\ x$, $2\ cos\ 3\ x$ etc, seront les cordes des complémens des angles doubles, triples etc ; et la table (A) deviendra celle de la page 295 de Viete, en multipliant tous les termes par 2 et faisant $2p = N$, $(2p)^2 = Q$, $(2p)^3 = C$ etc. suivant sa notation.

A l'égard de la table de la page 297 de Viete, elle donne le rapport des cordes des arcs doubles, triples quadruples etc, à la corde de l'arc simple ; et le premier de ces rapports y est désigné par N, dont le carré est Q, le cube C etc. Ainsi en prenant $2\ sin\ x$ pour la corde de l'arc simple, ces rapports seront représentés par $\frac{sin\ 2\ x}{sin\ x}$, $\frac{sin\ 3\ x}{sin\ x}$ etc ; et la table dont il s'agit s'accordera avec la table (B) en faisant $\frac{sin\ 2\ x}{sin\ x} = 2\ p = N$, et divisant chaque équation par la première.

La table de la page 299 de Viete renferme les deux tables (H) et (I) en multipliant tous les termes de

ses tables par 2, et faisant $2q = N$, $(2q)^2 = Q$

Il m'a paru intéressant de montrer ce que Viete avait fait sur l'objet dont il s'agit, et surtout d'indiquer lesquelles des formules connues pour la multiplication des angles lui sont dues, ce qu'on n'avait pas encore fait, que je sache, d'une manière tout-à-fait exacte.

Au reste Viete n'a pas donné les formules générales de ces tables; il a donné simplement le moyen de les continuer aussi loin qu'on voudra, en indiquant la loi des termes et de leurs coéfficiens.

Dans les mêmes actes de Léipsic, pour 1701 déjà cités plus haut, Jean Bernoulli avait aussi donné sans démonstration une formule générale pour les cordes des arcs multiples, laquelle revient à celle de la table (B), en observant que $2q$ est la corde de son complement à la demi circonférence.

Ensuite Jacques Bernoulli a donné dans les mémoires de l'Académie des sciences de 1702, deux formules pour les cordes des arcs multiples, qui répondent aux formules générales des tables (H) et (I) en observant que $2q$ étant la corde de l'arc $2x$, et $2p$ la corde de son complément $2 \sin mx$ sera la corde de l'arc m^{cuple}, et $2 \cos mx$ la corde de son complément; mais la première de ces deux formules avait déjà été

donnée par Newton dans sa première lettre à Olden burg, imprimée dans les œuvres de Wallis.

Enfin nous remarquerons qu'il n'y a que les fo mules générales des tables (*A*) (*B*). (*D*). (*F*) c se trouvent dans l'introduction d'Euler (chap. XIV

Mais toutes ces formules n'ont été données ju qu'ici que par induction, ou bien en suppos que le nombre *m* est un des nombres de la sé 1 . 2 3 etc de sorte qu'on peut douter si elles s pliquent à d'autres valeurs de *m*.

De plus si on considére les formules des tables (et (*B*). on voit qu'à la rigueur elles vont à l'in même lorsque *m* est un nombre entier positif ; car faisant $m = 1$, la première donne

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \text{e}$$

et la seconde donne

$$\sin x = q + \frac{q}{4p^2} + \frac{3q}{16p^4} + \text{etc},$$

valeurs qui sont évidemment fausses. Il en sera même en donnant à *m* d'autres valeurs quelconqu entieres et positives, et tenant compte de tous termes qui ne sont pas nuls.

Il est vrai que par la nature des tables (*A*) et (dont ces formules ne sont que le terme général,

ne doit y employer que les termes qui contiennent des puissances positives de p ; mais comme les termes qui suivent ne sont pas nuls, on ne voit pas *à priori* pourquoi on doit les rejeter, et on voit moins encore ce que la formule exprimerait en ne les rejettant pas. Nous réserverons le dénouement de ces difficultés pour la leçon suivante.

LEÇON ONZIÈME.

Suite de l'Analise des Sections angulaires.

Reprenons les expressions générales de $\cos m x$ et $\sin m x$ données dans la Leçon précédente ; faisant $\cos x = p$, et par conséquent $\sin x = \sqrt{(1 - p^2)}$ on aura

$$2 \cos m x = (p + \sqrt{(p^2 - 1)})^m + (p - \sqrt{(p^2 - 1)})^m$$

$$2 \sin m x \sqrt{-1} = (p + \sqrt{(p^2 - 1)})^m - (p - \sqrt{(p^2 - 1)})^m.$$

Nous observerons d'abord que ces formules sont toujours vraies quel que soit le nombre m, parce qu'elles ont été déduites de l'équation générale $\cos x \pm \sin x \sqrt{-1} = e^{\pm x \sqrt{-1}}$ élevée à la puissance m. Ainsi les doutes qui pourraient rester à cet égard disparaissent ici entièrement.

Tout se réduit donc à développer, suivant les puissances de p, l'expression $\left(p \pm \sqrt{(p^2 - 1)}\right)^m$ Comme les quantités $p + \sqrt{(p^2 - 1)}$ et $p - \sqrt{(p^2 - 1)}$ sont les deux racines de l'équation $z^2 - 2pz + 1 = 0$, je ferai usage du théorème que j'ai démontré dans la note XI de la *Résolution des équations numériques* sur la somme des puissances des racines des équations.

Suivant ce théorème, si on a une équation quelconque de la forme

$$u - x + fx = 0,$$

où x est l'inconnue, la formule

$$u^{-m} + (u^{-m})' fu + \left(\frac{(u^{-m})' f^2 u}{2} \right)' + \left(\frac{(u^{-m})'' f^3 u}{2.3} \right)'' + \text{etc.}$$

n'étant continuée que pendant les puissances négatives de u donne la somme des puissances $-m^{emes}$ de toutes les racines, mais étant continuée à l'infini elle ne donne que la même puissance de la plus petite des racines. Les quantités $f^2 u$, $f^3 u$ etc sont le carré, le cube etc de fx; et les traits appliqués aux parenthèses désignent les fonctions dérivées des fonctions de u renfermées entre ces parenthèses.

Ainsi dans notre cas si on change z en x et qu'on divise l'équation par $2p$, coeficient de x, elle deviendra $\frac{1}{2p} - x + \frac{x^2}{2p} = 0$, laquelle étant comparée à $u - x + fx = 0$ donne $u = \frac{1}{2p}$ et $fx = \frac{x^2}{2p}$ donc $fu = \frac{u^2}{2p}$, de manière que la série précédente deviendra

$$u^{-m} + \frac{(u-m)'u^2}{2p} + \left(\frac{(u-m)'u^4}{2.4p^2}\right)' + \left(\frac{(u-m)'u^6}{2.3.8p^3}\right)'' + \text{etc};$$

où il faudra faire $u = \frac{1}{2p}$ après avoir pris les fonctions dérivées, désignées par les traits appliqués aux crochets.

Or $(u^{-m})' = -m\,u^{-m-1}$, $((u^{-m})'u^4)' = (-mu^{-m+3})' = m(m-3)u^{-m+2}$,

$((u^{-m})'u^6)'' = (-mu^{-m+5})'' = -m(m-5)(m-4)u^{-m+3}$, etc.

Ainsi la série deviendra

$$u^{-m} - \frac{m}{2p}u^{-m+1} + \frac{m(m-3)}{2.4p^2}u^{-m+2} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3.8p^3}u^{-m+3} + \text{etc.}$$

On voit que les puissances de u seront négatives

m étant positif, tant qu'aucun des facteurs $m-3$, $m-4$, $m-5$ etc. ne deviendra négatif; ainsi pour n'avoir égard qu'aux termes qui contiendront des puissances négatives de u, il suffira de pousser la série jusqu'à ce que quelqu'un des facteurs dont il s'agit devienne négatif.

Faisons maintenant $u = \frac{1}{2p}$, et la série deviendra

$$(2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3}(2p)^{m-6} + \text{etc};$$

laquelle étant continuée seulement, comme on vient de le dire, exprimera la valeur de

$$\left(p + \sqrt{(p^2-1)}\right)^m + \left(p - \sqrt{(p^2-1)}\right)^{-m},$$

ce qui est la même chose que la valeur de

$$\left(p + \sqrt{(p^2-1)}\right)^m + \left(p - \sqrt{(p^2-1)}\right)^m;$$

à cause de

$$\left(p + \sqrt{(p^2-1)}\right)\left(\times (p - \sqrt{(p^2-1)}\right) = 1$$

Ainsi dans cet état la série dont il s'agit donnera la

valeur de $2\cos n\varphi$, ce qui s'accorde avec la formule de la table (A).

Mais si on continue la série à l'infini, alors elle ne donnera que la valeur de

$(p-\sqrt{(p^2-1)})^{-m}$, puisque $p-\sqrt{p^2-1}$ est la plus petite des deux racines ; ou ce qui revient au même, elle donnera la valeur de

$$(p+\sqrt{(p^m-1)})^m$$

Pour nous convaincre en effet que la série précédente prise dans toute son étendue n'est que le développement de cette quantité, nous allons chercher ce développement d'une manière directe, ce qui servira d'exemple de la manière d'employer les fonctions dérivées dans ces sortes de recherches.

Supposons donc qu'il s'agisse de développer l'expression $(p+\sqrt{(p^2-1)})^m$ dans une série descendante de la forme

$$Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{etc.}$$

Si on divise de part et d'autre par p^m et qu'on fasse $\frac{1}{p}=z$ on aura

$$(1+\sqrt{(1-z^2)})^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.}$$

où l'on voit que la série ne peut avoir que des puissances paires de z.

Ainsi, en faisant $u=z^2$, on aura la fonction

$(1 + \sqrt{(1-u)})^m$ à développer suivant les puissances de u.

Donc par la formule générale donnée à la fin de la leçon IX, si on fait $fu = (1 + \sqrt{(1-u)})^m$ on aura

$$(1 + \sqrt{(1-u)})^m = f + uf' + \frac{u^2}{2} f'' + \text{etc.}$$

où f, f', f'' sont les valeurs de fu, $f'u$ $f''u$ etc. lorsque $u = 0$.

Ainsi on trouvera d'abord $f = 2^m$; ensuite on aura $f'u = -\frac{m}{2} \times \frac{(1+\sqrt{(1-u)})^{m-1}}{\sqrt{(1-u)}}$

et de-là $f' = -m \times 2^{m-2}$; et ainsi de suite.

On peut de cette manière avoir successivement tous les coéficiens de la série, mais on n'en aura pas la loi, ce qui est le plus essentiel.

Pour la trouver d'une manière générale, je reprends la formule en p et je la suppose égale à y, ce qui me donne l'équation

$$y = (p + \sqrt{(p^2 - 1)})^m.$$

Je remarque maintenant qu'un des principaux avantages des fonctions dérivées est de pouvoir faire disparaître dans les équations les puissances et les radicaux. En effet, en prenant les fonctions dérivées par rapport à p et regardant y comme fonction de p, on a

$$y' = m\left(p + \sqrt{(p^2-1)}\right)^{m-1}\left(1 + \frac{p}{\sqrt{(p^2-1}}\right.$$

$$= \frac{m\left(p + \sqrt{(p^2-1)}\right)^m}{\sqrt{(p^2-1)}};$$

Cette équation divisée par l'équation primiti donne

$$\frac{y'}{y} = \frac{m}{\sqrt{(p^2-1)}};$$

multipliant en croix et çartant on aura

$$y'^2(p^2-1) = m^2 y^2.$$

Prenant de nouveau les fonctions dérivées par ra port à p on aura

$$2y'y''(p^2-1) + 2y'^2 p = 2m^2 yy'$$

d'où en divisant par $2y'$ résulte cette équation second ordre en y et p,

$$m^2 y - py' - (p^2-1)y'' = 0,$$

laquelle étant comme l'on voit linéaire par rapport à et dégagée de radicaux, est très-propre au développement de y en série.

En effet il n'y a qu'à substituer pour y la série

$$Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \text{et}$$

et par conséquent pour y'

$$mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{etc},$$

et pour y''

$$m(m-1)Ap^{m-2} + (m-1)(m-2)Bp^{m-3} + \text{etc.}$$

Ordonnant les termes, suivant les puissances de p, on aura

$$(m^2A - mA - m(m-1)A)p^m$$

$$+ (m^2B - (m-1)B - (m-1)(m-2)B)p^{m-1}$$

$$+ (m^2C - (m-2)C - (m-2)(m-3)C + m(m-1)A)p^{m-2}$$

$$+ (m^2D - (m-3)D - (m-3)(m-4)D + (m-1)(m-2)B)p^{m-3}$$

$$+ \text{etc} ; = 0.$$

Comme cette équation doit avoir lieu indépendamment de p, il faudra égaler à zéro le coéficient de chaque terme.

Le coéficient de p^m disparaissant de lui-même, c'est une marque que le coéficient A demeure indéterminé.

Le coéficient de p^{m-1}, se réduit à $m^2 B - (m-1)^2 B$ qui ne peut devenir nul à moins de faire $B = o$. Or B étant nul, il est facile de voir que les coéficiens de p^{m-3}, p^{m-5} etc. ne pourront aussi devenir nuls qu'en faisant $D = o$, $F = o$ etc.

Maintenant le coéficient de p^{m-2} se réduit

$$m^2 C - (m-2)^2 C + m(m-1) A$$

Celui de p^{m-4} se réduit de même à

$$m^2 E - (m-4)^2 E + (m-2)(m-3) C.$$

et ainsi des autres.

On aura donc, en réduisant, les équations

$$4(m-1) C + m(m-1) A = o$$

$$8(m-2) E + (m-2)(m-3) C = o$$

$$12(m-3) G + (m-4)(m-5) E = o$$

etc.

Lesquelles donnent la loi, suivant laquelle coéficiens A, C, E, G etc, dépendent les uns autres.

On tire de ces équations

$$C = -\frac{m A}{4}$$

$$E = -\frac{(m-3) C}{8} = \frac{m(m-3)}{4.8}$$

$$G = -\frac{(m-4)(m-5) E}{12(m-3)} = -\frac{m(m-4)(m-}{4.8.12}$$

etc.

Or nous avons vu que le premier coéficient A est égal à 2^m ; ainsi on aura ce développement

$$(p + \sqrt{(p^2 - 1)})^m$$

$$= (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4}$$

$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \text{etc.}$$

comme on l'a vu ci-dessus ; mais l'analise précédente est générale pour une valeur quelconque de m.

Maintenant pour avoir la valeur complette de $2 \cos m x$, il faut avoir encore le développement de $(p - \sqrt{(p^2 - 1)})^m$. Comme cette expression ne diffère de celle que nous venons de traiter que par le signe du radical, lequel ne se trouve plus dans l'équation dérivée en y dont nous avons fait usage, il s'ensuit que la même formule que nous venons de trouver pourra encore s'appliquer à ce développement. Il faut seulement remarquer que comme les premiers termes du radical $\sqrt{(p^2 - 1)}$ sont $p - \frac{1}{2p}$ + etc , le premier terme du développement dont il s'agit, sera $\frac{1}{(2p)^m}$; de sorte qu'ici

il faudra prendre m négativement, et comme l'équation dérivée en y ne contient que m^2, on aura nécessairement la même série en y changeant seulement m en $-m$; ce qui suit d'ailleurs aussi de ce que

$$(p-\sqrt{(p^2-1)})^m = (p+\sqrt{(p^2-1)})^{-m};$$

on aura donc

$$(p-\sqrt{(p^2-1)})^m$$

$$= (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}$$

$$(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2 \cdot 3}(2p)^{-m-6}$$

+ etc.

Ainsi réunissant les deux séries on aura

$$2\cos mx = (2p^m) - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3}{2}$$

$$(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2 \cdot 3}(2p)^{m-6}$$

+ etc.

$$+ (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}$$

$$(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2 \cdot 3}(2p)^{-m-6}$$

+ etc.

C'e

C'est le développement complet de $\cos mx$ en puissance de $\cos x$ pour une valeur quelconque de m.

Si maintenant on fait ici $m = 1$, on a

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \text{etc},$$

$$+ \frac{1}{4p} + \frac{1}{16p^3} + \frac{2}{64p^5} + \text{etc.}$$

où l'on voit que les deux séries se reduisent au premier terme p.

En donnant à m d'autres valeurs entières et positives quelconques, on trouvera toujours que la seconde série qui contient les puissances négatives de p servira à détruire dans la première série tous les termes qui contiendront ces mêmes puissances ; c'est ce qu'on peut démontrer en général par la loi même des deux séries ; de sorte que le résultat se réduira aux seuls termes de la première qui contiennent des puissances positives de p ; ce qui revient à ne conserver dans cette série que les termes où p est élevé à une puissance positive, ou nulle ; comme nous l'avions trouvé plus haut par une autre voie.

Mais lorsqu'on donne à m une valeur fractionaire quelconque, les deux séries ne se détruisent plus, et leur réunion est nécessaire pour avoir la valeur complette de $\cos mx$.

En prenant la différence des deux séries au lieu

de leur somme on aurait la valeur de $\sin m x \sqrt{-1}$; mais $\sin m x$ serait exprimé de cette manière par des séries infinies et imaginaires. Pour avoir une expression réelle, il suffit de considérer que la fonction dérivée de $\cos m x$ est $-m \sin m x$, et que celle de p est $-q$, puisque $p = \cos x$, et $q = \sin x$; de manière qu'en prenant les fonctions dérivées des séries trouvées pour $\cos m x$, on aura sur le champ en changeant les signes et divisant par $2m$

$$\sin m x = \Big((2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \text{etc} ; \Big) q$$

$$- \Big((2p)^{-m-1} + (m+2)(2p)^{-m-3} + \frac{(m+3)(m+4)}{2}(2p)^{-m-5} + \text{etc} \Big) q.$$

Cette expression se réduit aussi à une forme finie, lorsque m est un nombre entier par la destination mutuelle des termes qui contiendraient des puissances négatives de p; de sorte que m étant un nombre positif entier, il suffira de ne prendre dans la première série que les termes qui contiendront des puissances positives de p; ce qui s'accorde avec la formule de la table (B).

Lorsque m est un nombre fractionaire les deux séries vont à l'infini et jointes ensemble donnent, la vraie valeur de $\sin m x$ développée suivant les puissances

descendantes de $\cos x$, comme cela a lieu pour la valeur de $\cos mx$.

Euler a le premier reconnu cette espèce d'imperfection des formules connues des tables (A) et (B); il a fait voir par une analise à peu près semblable à celle que nous venons de donner, que ces formules pour être générales et applicables à des valeurs quelconques de m, doivent être complettées par des formules semblables où l'exposant m est négatif.

J'ai cru devoir entrer dans ce détail pour l'instruction des jeunes analistes, et surtout pour montrer que si l'analise paraît quelquefois en défaut, c'est toujours faute de l'envisager d'une manière assez étendue et de la traiter avec toute la généralité dont elle est susceptible (voyez le tome IX des *nova Acta* de l'académie de Pétersbourg)

Nous venons de développer les expressions $(p \pm \sqrt{(p^2 - 1)})^m$ suivant les puissances descendantes de p, on peut de même et par le moyen de la même équation dérivée en y les développer suivant les puissances ascendantes de p, ce qui nous donnera les formules des tables (C), (D), (E), (F), et pourra même servir à les compléter pour toutes les valeurs de m.

Supposons donc en général

$$y = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \text{etc.}$$

Substituant dans la même équation, et ordonnant suivant les puissances de p on aura

$$m^2 A + 2 C$$
$$+ (m^2 B - B + 2.3 D) p$$
$$+ (m^2 C - 2 C + 3.4 E - 2 C) p^2$$
$$+ (m^2 D - 3 D + 4.5 F - 2.3 D) p^3$$
$$+ (m^2 E - 4 E + 5.6 G - 3.4 E) p^4$$
$$+ \text{etc} : = 0.$$

Egalant donc à zéro chacun des coéficiens d puissances de p on aura, en réduisant

$$m^2 A + 2 C = 0$$
$$(m^2 - 1) B + 2.3 D = 0$$
$$(m^2 - 4) C + 3.4 E = 0$$
$$(m^2 - 9) D + 4.5 F = 0$$
$$(m^2 - 16) E + 5.6 G = 0$$
etc.

D'où l'on tire en substituant successivement l valeurs précédentes

$$C = - \frac{m^2 A}{2.3}$$

$$D = - \frac{(m^2 - 1) B}{2.3}$$

$$E = \frac{m^2 (m^2 - 4) A}{2.3.4}$$

$$F = \frac{(m^2 - 1)(m^2 - 9) B}{2.3.4.5}$$

$$G = -\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)A}{1.2.3.4.5.6}$$

etc :

Les coéficiens A et B étant restés indéterminés, il faudra les déterminer par la nature de la fonction y. Or il est visible qu'on a $A = y$ et $B = y'$ en faisant $p = o$. Ainsi puisque la fonction y est égale à $(p + (\sqrt{p^2-1}))^m$, on aura d'abord en faisant $p = o$, $A = (\sqrt{-1})^m$. Ensuite, en faisant $p = o$ dans la fonction dérivée y' trouvée ci-dessus, on aura

$$y' = m(\sqrt{-1})^{m-1} = B.$$

Substituant donc ces valeurs de A et B, on aura le développement de l'expression $(p + \sqrt{(p^2-1)})^m$

Pour avoir celui de l'expression $(p - \sqrt{(p^2-1)})^m$, il n'y aura qu'à prendre le radical $\sqrt{(p^2-1)}$ en moins ; mais comme ce radical n'entre plus dans l'équation dérivée en y par laquelle nous avons déterminé les coéficiens de la série, il s'ensuit qu'on aura la même série pour cette dernière expression que pour la première, aux coéficiens A et B près, qui pourront être différens ; et on trouvera ici le même procédé,

$$A = (-\sqrt{-1})^m \text{ et } B = m(\sqrt{-1})^{m-1}.$$

Donc puisque la somme de ces deux expressions donne la valeur de $2\cos mx$, comme on l'a vu plus haut, on aura cette valeur en substituant dans

la série $A + B\,p + C\,p^2 +$ etc à la place de A et B la somme des deux valeurs, qu'on vient de trouver, c'est à dire, en faisant

$$A = (\sqrt{-1})^m + (-\sqrt{-1})^m$$

$$B = m(\sqrt{-1})^{m-1} + m(-\sqrt{-1})^{m-1}$$

D'où il est facile de voir que lorsque m est un nombre entier impair, on aura $A = 0$, $B = \pm 2m$, et que lorsque m sera pair on aura $A = \pm 2$, $B = 0$.

Mais pour avoir les valeurs de A et B dégagées d'imaginaires pour toutes les valeurs de m, il n'y a qu'à employer la formule générale

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1}$$

et y supposer x égal à l'angle droit, car alors $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$; ainsi en adoptant l'angle droit pour l'unité des angles, et prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $+$ et en $-$, on aura

$$(\pm\sqrt{-1})^m = \cos m \pm \sin m.\sqrt{-1},$$

et les valeurs de A et B deviendraient

$$A = 2\cos m,\ B = 2m\cos(m-1).$$

On aura donc en général pour un nombre quelconque m,

$$\cos mx = \cos m\left(1 - \frac{m^2}{2}p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4\right.$$

$$\left. - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc}\right)$$

$$+ \cos(m-1)\left(mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc}\right)$$

Tel est le développement complet de $\cos mx$ en série ascendante de p ou $\cos x$. On voit que lorsque m est un nombre entier, il y a toujours une des deux séries partielles qui se termine, et que l'autre qui irait à l'infini, disparait parce qu'elle se trouve toute multipliée par un coéficient $\cos m$ ou $\cos(m-1)$ qui devient nul. On a alors l'une ou l'autre des formules des tables (C) et (E). Mais lorsque m est une fraction quelconque les deux séries vont à l'infini et leur réunion est nécessaire pour avoir la valeur complette de $\cos mx$; ce que personne, ce me semble, n'avait encore observé.

En prenant les fonctions dérivées comme on a fait plus haut pour déduire la valeur de $\sin mx$ de celle de $\cos mx$, on aura aussi, à cause de $p' = -q$.

$$\sin mx = -\cos m\left(mp - \frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc}:\right)q + \cos(m-1)\left(1 - \frac{m^2-1}{2}p^2\right.$$

$$+ \frac{(m^2-1)\ m^2-9)}{2.3.4}\ p^4 - \text{etc} ;)\ q$$

pour le développement complet de *sin m x*, quelque soit *m* ; où l'on voit que lorsque *m* est un nombre entier on a les formules des tables (*D*) et (*F*)

Il nous reste à considérer encore les développemens de *cos m x* et *sin m x* suivant les puissances ascendantes de *q*, conformément aux tables (*G*), (*H*), (*I*), (*K*).

Pour cela nous remarquerons d'abord qu'en faisant *sin x* = *q*, on a *cos x* = $\sqrt{}$ (1 − q^2) et les expressions générales de *cos m x* et *sin m x* deviennent

$$2\ \cos m\ x = (\sqrt{(1-q^2)} + q\sqrt{-1})^m + (\sqrt{(1-q^2)} - q\sqrt{-1})^m$$

$$2\ \sin m\ x\sqrt{-1} = (\sqrt{(1-q^2)} + q\sqrt{-1})^m - (\sqrt{(1-q^2)} - q\sqrt{-1})^m.$$

Il ne s'agit donc que de développer les formules $(\sqrt{(1-q^2)} \pm q\sqrt{-1})^m$ en puissances ascendantes de *q*.

Faisons $(\sqrt{(1-q^2)} + q\sqrt{-1})^m = z$,

on aura en prenant les fonctions dérivées par rapport à *q*,

$$z' = m\left(\sqrt{(1-q_1)} + q\sqrt{-1}\right)^{m-1}$$

$$\times\left(-\frac{q}{\sqrt{(1-q^2)}} + \sqrt{-1}\right)$$

$$= \frac{m\left(\sqrt{(1-q^2)} + q\sqrt{-1}\right)^{m-1}\left(\sqrt{(1-q^2)} \times \sqrt{-1} - q\right)}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

$$= \frac{m\sqrt{-1} \times \left(\sqrt{(1-q^2)} + q\sqrt{-1}\right)^m}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

Divisant cette équation par l'équation primitive, on a

$$\frac{z'}{z} = \frac{m\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-q^2)}}$$

multipliant en croix et carrant on aura

$$z'^2(1-q^2) = -m^2 z^2.$$

Prenant de nouveau les fonctions dérivées et divisant par $2z'$, on aura cette équation du second ordre en z,

$$m^2 z - q z' - (q^2 - 1) z'' = 0,$$

qui est comme l'on voit entièrement semblable à l'équation en y et p trouvée plus haut.

Ainsi en supposant

$$z = A + Bq + Cq^2 + Dq^3 + \text{etc.}$$

on trouvera les mêmes valeurs des coéficiens ; mais comme les deux premiers A et B demeurent indéterminés, ils pourront être différens à raison de la diversité des fonctions y et z en p et en q.

Pour trouver ici ces deux coéficiens, ce quil y a de plus simple c'est de chercher par le développement actuel les deux premiers termes de la série. Or puisque $\sqrt{(1-q^2)}$ donne

$$1 - \frac{q^2}{2} + \text{etc};$$

il est évident que les deux premiers termes de

$$\left(1 + q\sqrt{-1} - \frac{q^2}{2} + \text{etc}, \right)^m$$

sont $1 + mq\sqrt{-1}$; ainsi on aura

$$A = 1, B = m\sqrt{-1}.$$

Le développement de $(\sqrt{(1-q^2)} - q\sqrt{-1})^m$ sera le même en changeant seulement $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; ainsi on aura pour ce développement

$$A = 1 \text{ et } B = -m\sqrt{-1}.$$

Donc pour avoir la somme des deux développemens il n'y aura qu'à prendre pour A et pour B la somme des deux valeurs correspondantes, ce qui donne $A = 2$, $B = 0$.

Et pour avoir la différence des mêmes développemens on prendra la différence des valeurs correspondantes de A et B, ce qui donnera

$$A = 0, \quad B = 2m\sqrt{-1}.$$

Faisant ces substitutions on aura donc en divisant par 2 et par $2\sqrt{-1}$

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}q^4$$

$$- \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc};$$

$$\sin mx = mq - \frac{m(m^2-1)}{2.3}q^3$$

$$+ \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}$$

Ces formules sont comme l'on voit les mêmes que celles des tables (I) et (H); mais par la manière dont nous venons de les trouver on voit en même tems qu'elles sont générales pour des valeurs quelconques de m. Cependant comme la premiére ne se termine que lorsque m est un nombre entier pair, et que la seconde ne se termine que lorsque m est un nombre entier impair, elles ne peuvent servir pour la section des angles que dans ces cas; mais on peut en prenant les fonctions dérivées, comme nous l'avons

fait ci-dessus, deduire de ces mêmes formules d'au formules, qui se termineront justement dans les où celles ci vont à l'infini. Pour cela on se rappell que les fonctions dérivées de $\cos mx$ et $\sin mx$ s $-m \sin mx$ et $m \cos mx$, et que celles de p et q s $-q$ et p ; de sorte que les deux équations fournir par la dérivation, ces deux-ci :

$$\sin.m\,x = p\left(mq - \frac{m(m^2-4)}{2.3}q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}q^5 - \text{etc},\right)$$

$$\cos mx = p\left(1 - \frac{m^2-1}{2}q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}q^4 - \text{etc}\right)$$

qui répondent, comme l'on voit, aux formules tables (K) et (G), et qui sont par conséquent a générales pour des valeurs quelconques de m.

Le théorème de Cotes est si intimément lié ave théorie des sections angulaires que nous ne pou nous dispenser d'en dire un mot ici.

On ignore comment Cotes l'a trouvé, et on a donné après sa mort différentes démonstrations ou moins simples, et même plus ou moins rig

:s. Sans avoir recours aux expressions imaginaires
ne on le fait communément, on peut le déduire
:tement des formules mêmes données par Viete,
nous avons rapportées dans la table (*A*); et il
raisemblable que c'est ainsi que Cotes y est par-

: effet si on multiplie ces formules par 2 et qu'on
ppose $p = y + \frac{1}{y}$ elles se réduisent à
forme simple

$$2\,Cos\,x = y + \frac{1}{y}$$

$$2\,Cos\,2\,x = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

$$2\,Cos\,3\,x = y^3 + \frac{1}{y^3}$$

$$2\,Cos\,4\,x = y^4 + \frac{1}{y^4}$$

etc.

il est facile de conclure en général

$$2\,cos\,m\,x = y^m + \frac{1}{y^m}$$

pour se convaincre d'une manière plus directe de

la généralité de cette formule, il suffit de considérer que si dans l'équation

$$2\cos x \cos mx = \cos(m-1)x + \cos(m+1)x,$$

on fait $2\cos x = y + \frac{1}{y}$, et qu'on suppose que deux termes consécutifs $2\cos(m-1)$, et $2\cos mx$ soient de la forme

$$y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}} \text{ et } y^m + \frac{1}{y^m}$$

elle donnera

$$2\cos(m+1)x = (y + \frac{1}{y})(y^m + \frac{1}{y^m})$$

$$-(y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}) = y^{m+1} + \frac{1}{y^{m+1}}$$

Ainsi pourvu que les deux premiers termes $2\cos 0\,x$ et $2\cos x$ soient de la forme $y^m + \frac{1}{y^m}$ en faisant $m = 0$ et $m = 1$, ce qui est en effet, tous les autres seront nécessairement de la même forme.

Maintenant les deux équations

$$2\cos x = y + \frac{1}{y} \text{ et } 2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m}$$

nent ces deux-ci :

$$-2y\cos x + 1 = 0,\quad y^{2m} - 2y^m \cos x + 1 = 0$$

doivent donc avoir lieu en même tems ; par conquent il faut qu'elles aient une racine commune.

Soit a la racine commune à ces deux équations ; nme ces équations demeurent les mêmes en y chanmt y en $\frac{1}{y}$ il s'ensuit qne $\frac{1}{a}$ sera encore une ine commune aux mêmes équations ; mais l'équation $-2\cos x\, y + 1 = 0$ n'étant que du second ordre, peut avoir que les deux racines a et $\frac{1}{a}$; donc te équation a toutes ses racines communes avec l'éation $y^{2m} - 2\cos m\, x\, y^m + 1 = 0$; par conséquent e est nécessairement un diviseur de celle-ci.

Soit $m\, x = \varphi$, donc $x = \frac{\varphi}{m}$; il s'ensuit de qu'on vient de démontrer que la formule

$$y^{2m} - 2\cos\varphi\, y^{2m} + 1$$

our diviseur la formule

$$y^2 - 2\cos\frac{\varphi}{m}\, y + 1$$

m étant un nombre quelconque entier.

Or si c est la circonférence ou l'angle de qua droits, on sait que $\cos \varphi = \cos (\varphi + n c)$, n étant nombre quelconque entier; ainsi en mettant $\varphi +$ à la place de φ, et faisant successivement $n = 0$, 2, etc. $m - 1$, on en conclura que la formule

$$y^{2m} - 2 \cos \varphi \, y^m + 1$$

a pour diviseur les m formules suivantes.

$$y^2 - 2 \cos \frac{\varphi}{m} y + 1$$

$$y^2 - 2 \cos \left(\frac{\varphi}{m} + \frac{c}{m} \right) y + 1$$

$$y^2 - 2 \cos \left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2c}{m} \right) y + 1$$

$$y^2 - 2 \cos \left(\frac{\varphi}{m} + \frac{3c}{m} \right) y + 1$$

etc.

$$y^2 - 2 \cos \left(\frac{\varphi}{m} + \frac{m-1}{m} c \right) y + 1.$$

De sorte que comme ces diviseurs sont tous d rens entr'eux et qu'ils sont au nombre de m, il s suit que la formule en question du $2 m^{e m e}$ degré, peut être que le produit de ces m formules du sec degré.

Le théorème de Cotes n'est comme l'on sait qu'un cas particulier de ce théorème général, lorsqu'on y fait $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{c}{2}$, ce qui donne $\cos \varphi = \pm 1$, et réduit la formule générale à

$$(y^m \mp 1)^2.$$

Jusqu'ici nous avons développé les cosinus et les sinus des angles multiples en puissances des cosinus ou des sinus de l'angle simple. On peut chercher réciproquement à développer les puissances des cosinus ou sinus de l'angle simple en cosinus ou sinus des angles multiples, et cette transformation qui est toujours possible est un des plus grands avantages de l'algorithme des sinus et cosinus, par la facilité qu'elle donne de passer des fonctions primitives aux fonctions dérivées, et de revenir de celles-ci aux primitives.

Nous pourrions la déduire des formules trouvées ci-dessus, mais nous aimons mieux la chercher directement par le moyen des fonctions dérivées, pour donner un nouvel exemple de leur usage dans la transformation des fonctions.

Considérons la puissance $\cos x^{m'}$, et supposons cette fonction de x égale à y, nous aurons ainsi

$$y = \cos x^m,$$

prenant les fonctions dérivées par rapport à x, il viendra

$$y' = - m \cos x^{m-1} \sin x ;$$

cette équation, divisée par la prédédente, donne

$$\frac{y'}{y} = - \frac{m \sin x}{\cos x} ;$$

d'où l'on tire en réduisant

$$m y \sin x + y' \cos x = 0 ,$$

Équation dérivée du premier ordre, qui a l'avantage de ne plus contenir la puissance indéterminé de $\cos x$.

Supposons maintenant en général

$$y = A \cos n x + B \cos (n-1) x + C \cos (n-2) x + D \cos (n-3) x + \text{etc} ;$$

Les coéficiens A, B, C etc étant indéterminé ainsi que n.

L'équation précédente deviendra par cette substitution

$$m (A \cos n x + B \cos (n-1) x + C \cos (n-2) x + \text{etc} ,) \sin x$$

$$- (n A \sin n x + (n-1) B \sin (n-1) x + (n-2) C \sin (n-2) + \text{etc} ,) \cos x = 0 .$$

Savoir en développant les produits des sinus et cosinus, et ordonnant les termes suivant les sinus multiples

$$\left.\begin{array}{l} +(m\,A - n\,A)\,\sin(n+1)\,x \\ +(m\,B - (n-1)\,B\,\sin n\,x \\ +(m\,C - m\,A - (n-2)\,C - n\,A) \\ \qquad \sin(n-1)\,x \\ +(m\,D - m\,B - (n-3)\,D) \\ -(n-1)\,B\,\sin(n-2)\,x \\ +(m\,E - m\,C - (n-4)\,E \\ -(n-2)\,C)\,\sin(n-3)\,x \\ +\text{etc.} \end{array}\right\} = 0$$

Égalant donc à zéro chacun des coéficiens de ces différens termes on aura

$$(m-n)\,A = 0$$

$$(m-n+1)\,B = 0$$

$$(m-n+2)\,C - (m+n)\,A = 0$$

$$(m-n+3)\,D - (m+n-1)\,B = 0$$

$$(m-n+4)\,E - (m+n-2)\,C = 0$$

Etc.

La première donne d'abord $n = m$, et substituant cette valeur les autres deviennent

$$B = 0$$

$$2C - 2mA = 0$$

$$3D - (2m - 1)B = 0$$

$$4E - (2m - 2)C = 0$$

Etc

Ainsi le premier coéficient A demeure indéterminé ensuite on a

$$B = 0$$

$$C = \frac{2m}{2} A$$

$$D = \frac{2m - 1}{3} B$$

$$E = \frac{2m - 2}{4}$$

$$F = \frac{2m - 3}{5} D$$

Etc. :

Donc $B = 0$, $D = 0$, $F = 0$ etc.

Ensuite

$$C = m\,A$$

$$E = \frac{m(m-1)}{2}\,A$$

$$G = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\,A$$

Etc.

Ainsi on a en général quel que soit l'exposant m

$$\cos x^m = A\,(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \text{etc.})$$

Il reste à déterminer le coéficient A ; pour cela je suppose $x = 0$, j'ai

$$1 = A\,(1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.} + \text{etc.}) = A\,(1+1)^m = 2^m A$$

D'où l'on tire

$$A = \frac{1}{2^m}$$

Donc enfin en multipliant toute l'équation par 2^m, on aura

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \text{etc};$$

Série fort simple qui se termine toujours comi celle du binome lorsque m est un nombre entier p sitif.

On peut déduire de cette formule un pareil d veloppement pour $\sin x^m$ en changeant simp ment x en $1-x$, l'angle droit étant pris pour l' nité des angles.

Ainsi on aura de même

$$(2\sin x)^m = \cos m(1-x) + m\cos(m-2)(1-$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)(1-x) + \text{etc.}$$

Nous venons de donner une théorie complette d sections angulaires, et nous avons en même te montré par différens exemples, combien l'algorith des fonctions dérivées est utile pour la transformati des fonctions en faisant disparaître des équations puissances et les radicaux qui rendent les développ mens difficiles et font perdre la loi et la dépe dance mutuelle des termes.

On voit que tout se réduit à former d'abord d équations dérivées d'après l'équation ou les équatio primitives données, et à déduire ensuite de ces éq

tions dérivées d'autres équations primitives, qui seront les transformées des premières. Il est donc important de bien connaître la théorie de ces équations, et de se rendre familiers les différens artifices qui peuvent en faciliter le calcul.

Commençons par exposer les principes généraux de cette théorie.

LEÇON XII.

Théorie générale des équations dérivées, et des constantes arbitraires.

Nous avons déjà démontré que toute équation entre deux variables, par laquelle l'une de ces variables est fonction de l'autre, subsiste également en prenant les fonctions dérivées, premières, secondes, etc, de chaque terme de l'équation par rapport à l'une de ces variables.

Ces équations dérivées ayant lieu en même tems que l'équation primitive, il s'ensuit qu'une combinaison quelconque de ces différentes équations aura lieu aussi. Donc comme les constantes qui entrent dans une fonction restent les mêmes dans ses fonctions dérivée, on pourra toujours par le moyen des équations dérivées éliminer autant de constantes de l'équation primitive qu'on aura d'équations dérivées; l'équation résultante de cette élimination sera une équation du même ordre que la plus haute des équations dérivées, laquelle sera vraie en même tems que l'équation primitive et pourra par conséquent en tenir lieu; elle renfermera autant de constantes de moins que l'exposant de son ordre contiendra d'unités.

Ainsi l'équation primitive, combinée avec son équation dérivée ou prime, pourra donner une équation

tion du premier ordre contenant une constante de moins que l'équation primitive.

L'équation primitive combinée avec les équations dérivées, prime et seconde, donnera une équation du second ordre contenant deux constantes de moins que l'équation primitive. Et ainsi de suite.

On ne peut parvenir que d'une seule manière à l'équation du premier ordre résultante de l'équation primitive et de son équation dérivée par l'élimination d'une constante donnée ; mais on peut parvenir, de deux manières differentes, à l'équation du second ordre résultante de la primitive et de ses deux premières dérivées par l'élimination de deux constantes données ; et ce double point de vue donne lieu à des conséquences importantes, rélatives à ce genre d'équations.

Au lieu d'éliminer à la fois les deux constantes par le moyen des trois équations dont il s'agit, on peut n'éliminer d'abord que l'une ou l'autre de ces constantes à l'aide de l'équation primitive, et de sa dérivée ; on aura ainsi deux équations différentes du premier ordre, dont l'une ne contiendra que l'une des deux constantes, et dont l'autre ne contiendra que l'autre constante. Maintenant en combinant chacune de ces équations avec sa dérivée, on pourra aussi en éliminer la constante qui y étoit restée, et on aura deux équations du second ordre sans les deux constantes, lesquelles devront être équivalentes

entr'elles et avec l'équation qui résulte de l'élimination simultanée des deux constantes.

En effet chacune de ces équations donnera la valeur de la fonction seconde de la variable qu'on regarde comme fonction de l'autre, valeur qui sera exprimée par la fonction prime de la même variable, et par les deux variables mêmes sans les deux constantes qui entroient dans l'équation primitive; et il est facile de se convaincre que cette valeur est unique et déterminée, de quelque manière qu'on y parvienne, puisque les fonctions dérivées d'une fonction donnée soit explicite ou non, sont uniques et déterminées, et que les résultats de l'élimination sont aussi toujours déterminés.

On doit conclure de-là qu'une équation du second ordre peut-être dérivée de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus, et que ces équations seront par conséquent deux équations primitives de la même équation du second ordre, mais primitives du premier ordre pour les distinguer de l'équation primitive absolue, d'où celles-ci sont censées dérivées.

Enfin on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second, le raisonnement que nous venons de faire sur celles de cet ordre, et on en conclura de la même manière qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de trois équations différentes du second ordre, et qu'alors elle peut avoir trois équations primitives de cet ordre; et ainsi de suite.

Nous allons éclairer et confirmer cette théorie générale par quelques exemples.

Soit l'équation de premier dégré $y + ax + b = o$, en regardant y comme fonction de x et prenant les fonctions dérivées, on aura $y' + a = o$. En éliminant a au moyen de ces deux équations on aura l'équation du premier ordre $y - xy' + b = o$, dont l'équation primitive sera $y + ax + b = o$, a étant la constante arbitraire.

Si la constante b dépendait de la constante a, par exemple si $b = a^2$, alors en éliminant a, c'est-à-dire en substituant $-y'$ pour a, on aurait l'équation du premier ordre $y - xy' + y'^2 = o$, et l'équation primitive de celles-ci seroit $y + ax + a^2 = o$, a étant la constante arbitraire.

Supposons $b = c\sqrt{(1 + a^2)}$ on aura l'équation du premier ordre $y - xy' + c\sqrt{(1 + y'^2)}$, dont l'équation primitive sera $y + ax + c\sqrt{(1 + a^2)}$, où a est la constante arbitraire.

Soit encore l'équation $x^2 - 2ay - a^2 - b = o$, sa dérivée sera $x - ay' = o$, équation du premier ordre dont la proposée est l'équation primitive, et où b sera la constante arbitraire.

Mais si l'on veut que la constante arbitraire soit a, alors il faudra éliminer a ; or l'équation dérivée donne

$$a = \frac{x}{y'}$$

donc substituant cette valeur dans la proposée, elle

donnera

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = o,$$

ou bien

$$(x^2 - b)\,y'^2 - 2xyy' - x^2 = o,$$

d'où l'on tire

$$y'\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - yy' - x = o,$$

équation du premier ordre dont la primitive sera

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = o,$$

a étant la constante arbitraire.

Si on vouloit éliminer à la fois a et b, il faudroit employer les fonctions secondes. Ainsi puisqu'on a déjà trouvé l'équation du premier ordre $x - ay' = o$, où b ne se trouve plus, il n'y aura qu'à former l'équation dérivée de celle-ci, laquelle sera $1 - ay'' = o$, d'où l'on tire $a = \frac{1}{y''}$, et cette valeur substituée dans la précédente, donnera $x - \frac{y'}{y''} = o$ savoir $xy'' - y' = o$, équation du second ordre dont l'équation $x^2 - 2ay - a^2 - b = o$ sera la primitive absolue, a et b étant les deux constantes arbitraires.

On parviendroit à la même équation en faisant disparaître b de l'équation du premier ordre

$$y'\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - yy' - x = o$$

trouvée plus haut ; car en prenant les fonctions dérivées, on aura

$$y''\sqrt{(x^2+y^2-b)} + \frac{y'(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}} - yy'' - y'^2 - 1 = o$$

et éliminant b au moyen de la précédente, il viendra

$$\frac{y''(yy'+x)}{y'} + y'^2 - yy'' - y'^2 - 1 = 0,$$

savoir, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{y''x}{y'} - 1 = 0, \text{ ou } y''x - y' = 0.$$

On voit aussi que cette même équation du second ordre a deux équations primitives du premier ordre savoir :

$$x - ay' = 0 \text{ et } y'\sqrt{(x^2+y^2-b)} - yy' - x = 0;$$

où a et b sont les deux constantes arbitraires ; et ces deux-ci par l'élimination de la fonction dérivée y' donneront l'équation primitive absolue entre x et y,

$$\frac{x}{a}\sqrt{(x^2+y^2-b)} - \frac{yx}{a} - x = 0,$$

savoir $\sqrt{(x^2+y^2-b)} - y - a = 0$, et en faisant disparaître le radical $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$, qui est la même dont nous sommes partis.

En éliminant ainsi les constantes qu'on veut faire disparaître, on tombe souvent, comme on le voit dans des équations où la plus haute fonction dérivée est élevée à des puissances ; et ce n'est que par la résolution qu'on peut avoir la valeur de cette fonction en fonction des variables et des fonctions dérivées d'un ordre moindre.

On peut cependant parvenir directement à une équation dérivée où la plus haute fonction dérivée ne se trouve qu'au premier dégré ; pour cela il n'y a qu'à préparer l'équation primitive de manière que la constante arbitraire qu'on veut faire disparaitre s'en aille d'elle même en prenant la fonction dérivée de chacun de ses termes ; ce qui arrive lorsque cette constante est dégagée des variables, et forme elle seule un des termes de l'équation ; car alors la fonction dérivée de ce terme étant nulle, l'équation dérivée se trouvera naturellement délivrée de la constante, et la plus haute fonction dérivée y sera nécessairement à la première dimension ; car comme on l'a vu dans la leçon VI, en prenant la fonction dérivée d'une fonction de plusieurs variables, chaque variable ne peut donner que des termes multipliés par la fonction dérivée de la même variable.

Or il est évident que cette préparation ne demande que de résoudre l'équation primitive, en regardant la constante qu'on veut éliminer comme l'inconnue de l'équation. Ainsi on peut obtenir par ce moyen le même résultat qu'on auroit par la résolution de l'équation dérivée, par rapport à la plus haute fonction dérivée.

Dans le second exemple où l'équation primitive était $y + a x + a^2 = 0$, nous avons trouvé l'équation dérivée $y - x y' + y'^2 = 0$, laquelle donne par la résolution $2 y' = x + \sqrt{(x^2 - 4 y)}$. Mais si nous avions d'abord résolu l'équation par rapport à la

constante a, nous eussions eu

$$2a = -x + \sqrt{(x^2 - 4y)},$$

et sa dérivée serait

$$-1 + \frac{x - 2y'}{\sqrt{(x^2 - 4y)}} = 0,$$

savoir en multipliant par $\sqrt{(x^2 - 4y)}$,

$$x - 2y' - \sqrt{(x^2 - 4y)} = 0,$$

équation qui coincide avec la précédente, à cause de l'ambiguité du signe du radical.

On peut de la même manière faire disparaire successivement plusieurs constantes en préparant toujours l'équation, en sorte que la cons-tante à éliminer soit dégagée des variables.

Ainsi l'équation primitive $x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$, contenant la constante b isolé dans un seul terme, donne tout de suite l'équation du premier ordre sans b, $x - ay' = 0$; ensuite en dégageant a, on a $a = \frac{x}{y'}$, prenant la fonction dérivée de chacun des deux membres, on a

$$\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2} = 0,$$

équation qui étant multipliée par y'^2 devient

$$y' - xy'' = 0,$$

comme plus haut.

En commençant l'élimination par la constante a, nous avions trouvé l'équation du premier ordre,

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0;$$

comme la constante b y est dégagée des variables, il n'y a qu'à prendre la fonction dérivée de chaque terme pour avoir tout de suite l'équation du second ordre sans a ni b.

On a ainsi

$$x - \frac{y}{y'} - x + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^3} = 0$$

Cette équation se réduit à cette forme,

$$\left(\frac{xy''}{y'} - 1\right)\left(\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}\right) = 0.$$

Comme le facteur $\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}$ ne renferme que que la fonction prime y', il ne peut donner une équation du second ordre ; ainsi c'est l'autre facteur $\frac{xy''}{y'} - 1$, qu'il faut employer, et l'on a

$$\frac{xy''}{y'} - 1 = 0, \text{ savoir } xy'' - y' = 0,$$

comme ci-dessus.

Nous verrons plus bas, lorsqu'il sera question des équations primitives singulières, l'usage du premier facteur.

Ce

Ce peu d'exemples que j'ai choisis parmi les plus simples, suffit pour montrer comment les équations dérivées se forment des équations primitives, par l'évanouissement des constantes. On voit que pour une équation primitive donnée, il est toujours possible de trouver une équation dérivée, qui renferme autant de constantes de moins qu'il y aura d'unités dans l'ordre de cette équation, et que de quelque manière qu'on parvienne à cette équation, et sous quelque forme qu'elle se présente, elle sera toujours essentiellement la même. Ainsi le problême de trouver l'équation dérivée d'une primitive donnée est résolu dans toute sa généralité. Nous allons considérer maintenant le problême inverse qui consiste à remonter des équations dérivées aux primitives.

Il est d'abord évident que puisque dans les équations à deux variables, une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite; il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive peut contenir une constante de plus, qu'une équation du premier ordre, deux constantes de plus qu'une équation du second ordre, et ainsi de suite, constantes qui seront par conséquent arbitraires; et on voit en même tems qu'elles ne sauraient en contenir davantage, puisqu'on ne pourrait les faire disparaître toutes, par le moyen des équations dérivées.

Cette proposition étant d'une grande importance dans la théorie des fonctions dérivées, et n'ayant pas encore été démontrée d'une manière tout-à fait rigoureuse, nous croyons devoir en donner une démonstration directe tirée de l'expression générale de la fonction primitive.

Si y est une fonction quelconque de x, et qu'on dénote par $y^0, y^{0'}, y^{0''}, y^{0'''}$ etc: les valeurs de y et de ses fonctions dérivées y', y'', y''' etc: qui répondent à $x = 0$, et qui sont par conséquent constantes; on aura par ce que nous avons démontré à la fin de la leçon IX,

$$y = y^0 + y^{0'} x + y^{0''} \frac{x^2}{2} + y^{0'''} \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Et si on veut arrêter la série au terme $n^{ème}$, alors on aura les limites du reste, en substituant dans le terme suivant

$$y^{(n)} \frac{x^n}{1.\ 2.\ 3 \ldots . n}$$

à la place de $y^{0(n)}$ la plus grande et la plus petite valeur de $y^{0(n)}$ depuis $x = 0$ jusqu'à la valeur qu'on veut attribuer à x.

Maintenant si la valeur de y est donnée par une équation du premier ordre, entre x, y et y', on aura par cette équation la valeur de y' en x et y, et de la on trouvera, en prenant les fonctions dérivées, une équation du second ordre en $x, y\ y'$, et y'',

ensuite une équation du troisième ordre entre x, y, y', y'' et y''' ; et ainsi de suite ; de sorte qu'en substituant successivement dans ces équations les valeurs de y', y'', y''' etc : données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse les valeurs de $y^{o'}$ y', y'', y''' etc : exprimées en x et y. Or, en faisant $x = o$, les quantités y, y', y'' etc : se changeront en y^o, $y^{o'}$, $y^{o''}$ etc : ainsi on aura les valeurs de $y^{o'}$ $y^{o''}$, etc : exprimées en y^o, qui demeurera indéterminée.

De même si on n'a pour la détermination de y, qu'une équation du second ordre entre x, y, y' et y'', on en tirera successivement des équations des ordres supérieurs, entre x, y, y', y'' et y''', entre x, y, y', y'', y''', y'''', et ainsi de suite, et par les substitutions successives des valeurs de y'', y''' etc, données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse, y'', y''', etc, données en x, y et y' ; de sorte qu'en faisant $x = o$, on aura les valeurs de $y^{o''}$, $y^{o'''}$ etc, exprimées en y^o, et $y^{o'}$, ces deux quantités demeurant indéterminées ; et ainsi de suite.

Donc enfin, faisant ces substitutions dans l'expression générale de y en x, il est clair qu'il restera dans cette expression une indéterminée constante y^o, lorsque la fonction y sera donnée par une équation du premier ordre, qu'il y restera deux constantes indéterminées y^o et $y^{o'}$, lorsque y ne sera donnée

que par une équation du second, ordre, qu'il y en restera trois, savoir y^{o}, $y^{o'}$ et $y^{o''}$, lorsque y sera donné par une équation du troisième ordre; et ainsi de suite.

Donc, en général, l'expression de y en x, renfermera autant de constantes indéterminées, qu'il y aura d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation qui détermine la fonction y; et quoique cette conclusion soit fondée ici sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de y, puisqu'on peut toujours regarder une expression en série, comme le développement d'une expression finie.

Dans l'analise précédente on voit que les constantes arbitraires sont toujours les valeurs de y, y', y'' etc, qui répondent à $x = o$, au lieu qu'en envisageant, comme nous l'avons fait plus haut, les équations dérivées comme le resultat de l'élimination des constantes, ces constantes peuvent être quelconques; mais il est toujours facile de les réduire les unes aux autres. Car quelles que soient les constantes qui entrent dans l'expression de y, si on déduit de cette expression celles de y', y'' etc, et qu'ensuite on fasse $x = o$; ce qui changera les valeurs de y, y', y'' etc en y^{o}, $y^{o'}$, $y^{o''}$: on pourra toujours, en prenant autant de ces valeurs qu'il y a de constantes arbitraires, déterminer celles-ci en y^{o}, $y^{o'}$, $y^{o''}$ etc, et les substituer ensuite dans l'expression générale de y.

Or quelle que puisse être la forme de cette expression ou de l'équation d'où elle dépend, à raison des différentes constantes qui y seront contenues, il est visible que lorsque ces constantes seront réduites aux valeurs de y^{o}, $y^{o\prime}$, $y^{o\prime\prime}$ etc, cette forme deviendra nécessairement la même pour la même équation dérivée.

On peut donc conclure en général que, si l'on a une équation dérivée d'un ordre quelconque, et que l'on trouve de quelque manière que ce soit une équation entre les mêmes variables qui y satisfasse, et qui renferme autant de constantes arbitraires, qu'il y aura d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation dérivée; cette équation sera l'équation primitive de la proposée avec toute la généralité dont elle est susceptible; de sorte qu'elle renfermera nécessairement toute autre équation qui pourrait aussi satisfaire à la même équation avec autant de constantes arbitraires.

On voit par là que les constantes arbitraires forment proprement la liaison entre les équations primitives et les équations dérivées; celles-ci sont par leur nature plus générales que les équations d'où elles dérivent, à raison des constantes qui ont disparu, ou qui peuvent avoir disparu; elles équivalent donc à toutes les équations primitives, qui ne différeraient entr'elles que par la valeur de ces constantes.

On pourra donc toujours passer d'une équation

primitive à une de ses dérivées d'un ordre quelconque, et revenir ensuite de celle ci à une nouvelle équation primitive, pourvu que cette dernière opération y introduise le nombre requis de constantes arbitraires. Alors cette dernière équation renfermera la première, et lui deviendra équivalente, en déterminant convenablement ses constantes arbitraires.

Comme nous avons vu qu'une équation du second ordre peut provenir de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire, qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de même de trois équations différentes du second ; et ainsi de suite, il est naturel d'en conclure aussi réciproquement que toute équation du second ordre aura deux équations primitives du premier ordre, chacune, avec une constante arbitraire, que toute équation du troisième ordre aura trois équations primitives du second ordre, ayant chacune une constante arbitraire, et ainsi de suite. Mais nous pouvons démontrer aussi cette proposition d'une manière directe, par une analyse semblable à celle que nous avons employée ci-dessus.

Considérons la formule générale du développement des fonctions

$$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2} f''x + \text{etc.}$$

Faisons $y = fx$ et $i = -x$, on aura

$fx = y$, $f'x = y'$, $f''x = y''$ etc ;

et $f(x + i)$ deviendra $f(x - x)$, c'est-à-dire, égale à la valeur de fx ou y, lorsqu'on y fait $x = 0$, valeur que nous avons désignée plus haut par y^0. Ainsi, par ces substitutions, on aura

$$y^0 = y - xy' + \frac{x^2}{2} y'' - \frac{x^3}{2.3} y''' + \text{etc.}$$

Changeons maintenant dans la formule générale fx en $f'x$, et l'on aura de même

$$f'(x + i) = f'x + if''x + \frac{i^2}{2} f'''x + \text{etc.}$$

Donc faisant de nouveau

$fx = y$, $f'x = y'$, $f''x = y''$ etc, et $i = -x$; ce qui donnera

$$f'(x - i) = f'(x - x),$$

valeur de $f'x$ ou de y', lorsque $x = 0$, que nous avons désignée par $y^{0'}$, on aura

$$y^{0'} = y' - xy'' + \frac{x^2}{2} y''' - \frac{x^3}{2.3} y'''' + \text{etc.}$$

On trouvera de la même manière

$$y^{0''} = y'' - xy''' + \frac{x^2}{2} y'''' - \frac{x^3}{2.3} y^{v} + \text{etc.}$$

Cela posé, si y est donnée par une équation du premier ordre, on aura la suite des valeurs de y', y'', y''', etc ; toute donnée en x et y, comme on l'a vu plus haut. Donc substituant ces valeurs dans la formule

$$y^0 = y - x\,y' + \frac{x^2}{2}\,y'' - \frac{x^3}{2.3}\,y''' + \text{etc.}$$

on aura une équation entre x et y avec la constante arbitraire y^0.

Si y est donnée par une équation du second ordre, on aura y'', y''', y^{iv} etc, données en x, y et y'; donc substituant ces valeurs dans les deux formules

$$y^0 = y - x\,y' + \frac{x^2}{2}\,y'' - \frac{x^3}{2\cdot 3}\,y''' + \text{etc.}$$

$$y^{0'} = y' - x\,y'' + \frac{x^2}{2}\,y''' - \frac{x^3}{2.3}\,y^{iv} + \text{etc.}$$

on aura deux équations en x, y et y', ayant chacune une des constantes arbitraires y^0 et $y^{0'}$, lesquelles seront également deux équations primitives du premier ordre de la proposée du second ordre.

Et ainsi de suite.

Quoique ces équations soient en séries, les conclusions qu'on peut tirer relativement à la nature des équations primitives, n'en sont pas moins exactes; et il est visible par la forme même de ces équations qu'elles

qu'elles sont essentiellement différentes, et qu'il ne peut y en avoir qu'un nombre égal à celui de l'ordre de l'équation donnée.

On en conclura donc aussi, que si pour une équation du second ordre, on trouve d'une manière quelconque deux équations différentes du premier ordre qui y satisfassent, et qui renferment chacune une constante arbitraire, on aura les deux équations primitives du premier ordre de la proposée; et toute autre équation de cet ordre qui y satisferait avec une constante arbitraire, sera nécessairement renfermée dans celle-ci.

Ces deux équations primitives étant connues, on pourra toujours en déduire l'équation primitive absolue, sans fonctions dérivées, en éliminant par leur moyen la fonction dérivée qu'elles contiendront, et qui est censée être la même dans les deux équations.

L'équation résultante ne contenant plus de fonction dérivée, sera l'équation primitive absolue de la proposée du second ordre; et comme les deux constantes arbitraires, qui entraient dans les deux équations primitives du premier ordre se trouveront dans cette équation, elle aura toute la généralité dont elle est susceptible.

Donc ayant une équation du second ordre, on aura également son équation primitive absolue, soit qu'on

trouve immédiatement une équation entre les mêmes variables qui y satisfasse, et qui renferme en même tems deux constantes arbitraires, soit qu'on trouve séparément deux équations du premier ordre qui y satisfassent chacune en particulier, et qui renferment chacune une constante arbitraire.

Mais si l'une de ces deux équations du premier ordre ne contenait point de constante arbitraire, alors l'équation primitive qu'on en déduirait, ne contenant qu'une seule constante arbitraire, n'aurait pas toute la généralité qu'elle peut avoir ; mais elle satisferait toujours à l'équation du second ordre, d'où on l'aurait tirée, en même tems qu'elle satisfera aux deux du premier ordre.

Il s'ensuit encore de là, que si l'on a une équation du premier ordre, et qu'on en déduise d'une manière quelconque une équation du second ordre, soit en éliminant une constante ou non, qu'ensuite on trouve une autre équation primitive du premier ordre, avec une constante arbitraire, on pourra, par l'élimination de la fonction dérivée qui se trouve dans les deux équations du premier ordre, avoir une équation entre les deux variables et la constante arbitraire, qui serapar conséquent l'équation primitive absolue de la proposée du premier ordre.

En général, si de la proposée du premier ordre on passe à une équation d'un ordre supérieur, et si on trouve d'une manière quelconque une équation pri-

mitive de celle-ci, d'un ordre inférieur avec une constante arbitraire, on pourra toujours, par l'élimination successive des fonctions dérivées, parvenir à une équation entre les deux variables et la constante arbitraire, laquelle sera ainsi l'équation primitive de la proposée.

Enfin on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second, ce que nous venons de trouver rélativement à celles de cet ordre, et en déduire des conclusions semblables.

LEÇON TREIZIÈME.

(Continuation de la leçon précédente)

Théorie des multiplicateurs des équations dérivées.

La manière la plus naturelle de trouver l'équation primitive d'une équation d'un ordre quelconque, est de la préparer de façon que son premier membre devienne une fonction dérivée exacte ; car alors il n'y aura qu'à prendre sa fonction primitive, et y ajouter une constante pour avoir l'équation primitive d'un ordre inférieur ; et en opérant ainsi successivement on pourra parvenir à l'équation primitive, entre les deux variables, et autant de constantes arbitraires que l'ordre de la proposée le comportera.

Or je vais prouver que cette préparation est toujours possible, par le moyen d'un multiplicateur, lorsque l'équation dérivée de l'ordre n, est réduite à la forme

$$y^{(n)} + f\left(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}\right) = 0.$$

$y^{(n)}$ étant la plus haute des fonctions dérivées de y.

D'un côté, il est clair que cette réduction est toujours possible ou censée possible, quelque soit la forme de l'équation proposée ; car il n'y a qu'à en tirer la valeur de $y^{(n)}$ en x, y, y', y'' etc, par les règles connues.

De l'autre côté, nous avons déjà observé plus haut que quelle que puisse être l'équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, si on dégage la constante arbitraire, et qu'on prenne ensuite les fonctions dérivées, on a une équation dérivée, où la plus haute des fonctions dérivées de y, ne sera qu'à la première dimension, et qui devra par conséquent être identique avec la proposée.

Ainsi ayant réduit l'équation primitive à la forme,

$$F\left(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}\right) = a$$

où a est la constante arbitraire, on aura l'équation dérivée,

$$F'\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right) = 0$$

laquelle en séparant la partie qui se rapporte à la variation de $y^{(n-1)}$ d'après la notation abrégée indiquée dans la leçon VI, peut se mettre sous la forme

$$F'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}\right) + y^{(n)}\ F'\left(y^{(n-1)}\right) = 0$$

D'où l'on tire

$$y^{(n)} + \frac{F'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}\right)}{F'\left(y^{(n-1)}\right)} = 0$$

Comme la constante a a disparu, cette équation devra être identique avec l'équation proposée puisque la valeur de $y^{(n)}$ doit être la même dans les deux

équations. Donc la fonction $f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$ sera indentique avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})}$$

Ajoutant de part et d'autre la quantité $y^{(n)}$, la fonction

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

deviendra identique avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}) + y^{(n)} F'(y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}$$

C'est-à-dire avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}$$

Donc l'équation

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

Etant multipliée par la fonction $F'(y^{(n-1)})$ deviendra

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0,$$

Ensorte que son premier membre sera une fonction dérivée exacte.

Ainsi il existe toujours une fonction d'un ordre inférieur à celui de l'équation proposée par laquelle cette équation étant multipliée, son premier membre devient une fonction dérivée exacte.

Comme cette proposition est fondamentale, et donne lieu à des conséquences importantes, nous allons la considérer sous un point de vue plus étendu.

Soit $$F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}, a) = 0$$

l'équation primitive de la même équation dérivée

$$y^{(n)} + f(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Par la théorie générale on aura l'équation dérivée de la primitive supposée en éliminant a au moyen de l'équation

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0$$

Et de sa dérivée

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

x étant régardé comme constante.

De-là il est facile de conclure comme ci-dessus que la fonction

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

deviendra indentique avec

$$\frac{F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}$$

en substituant ici à la place de a sa valeur en x, y etc $^{(n-1}$ tirée de l'équation primitive.

Considerant donc a comme une pareille fonct déterminée par l'équation primitive

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0,$$

on aura pour la détermination de a' l'équation rivée

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0$$

laquelle en séparant la partie qui se rapporte à a' vant la notation employée ci-dessus devient

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) + a' F'(a) = 0$$

D'où l'on tire

$$-a' = \frac{F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})}{F'(a)}$$

$$= \left(y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})\right) \times \frac{F'(y^{(n-1)})}{F'(a)};$$

équa

équation qui sera identique en substituant pour a sa valeur en x, y etc.

Si donc on multiplie l'équation

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

par la fonction $\frac{F'(y^{(n-1)})}{F'(a)}$, son premier membre deviendra une fonction dérivée exacte, dont la fonction primitive sera $= a$, en supposant a déterminée par l'équation

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0.$$

On est donc assuré de cette manière de l'existence d'un multiplicateur, qui peut rendre le premier membre de l'équation proposée, une fonction dérivée exacte.

La même équation identique nous fait voir aussi que ce multiplicateur n'est pas le seul qui jouisse de cette propriété, et nous donne en même-tems le moyen de trouver tous les multiplicateurs qui auront la même propriété. Car il est évident que le premier membre de l'équation, devenant égal à $= a'$, il sera toujours une fonction dérivée exacte, étant multiplié par une fonction quelconque de a, et qu'il ne pourra l'être qu'autant que le multiplicateur, ne contiendra que a. Donc le premier membre deviendra

aussi une fonction dérivée exacte, étant multipliée par une fonction quelconque de a.

D'où il est aisé de conclure que la formule générale de ces multiplications sera :

$$\frac{\varphi a \times F'(y^{(n-1)})}{F'(a)},$$

φa dénotant une fonction quelconque de a, et la quantité a étant une fonction de x, y, y', etc, déterminée par l'équation primitive

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0.$$

Il est facile de voir aussi que tous ces multiplicateurs redonneront la même équation primitive

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0,$$

a étant ici la constante arbitraire. Car le premier membre de l'équation proposée de l'ordre n^{eme}, deviendra, par la multiplication de la formule précédente, identique avec la quantité $-a' \varphi a$; de sorte qu'en dénotant par Φa à la fonction primitive de $a' \varphi a$, on aura tout de suite l'équation primitive $\Phi a = const$; d'où l'on tirera aussi $a = const$. Or, a étant ici la fonction de x, y, y' etc, $y^{(n-1)}$ qui résulte de l'équation $F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0$, il est visible que l'équation $= const$, n'est autre chose que cette même

[illegible] dans laquelle on suppose que a devienne une constante arbitraire.

Ainsi, lorsqu'une équation, dérivée de l'ordre n^{eme}, est réduite à la forme

$$y^{(n)}+f(x, y, y', y''\ldots y^{(n-1)}) = 0$$

chaque équation primitive de l'ordre $n-1$, avec une constante arbitraire, fournit une infinité de multiplicateurs, tous renfermés dans une même formule, lesquels peuvent rendre le premier membre de l'équation une fonction dérivée exacte, et redonner la même équation primitive.

Si l'équation proposée n'est que du premier ordre, il n'y a alors qu'une seule équation primitive, et par conséquent, il n'y aura aussi qu'une seule formule de multiplicateurs.

Si l'équation proposée est du second ordre, nous avons démontré qu'elle est susceptible alors de deux différentes équations primitives du premier ordre; chacune d'elles donnera donc une formule particulière de multiplicateurs; mais on pourra aussi renfermer ces formules dans une formule plus générale encore.

Car soit

$$y''+f(x, y, y') = 0$$

L'équation proposée du second ordre, dont les deux équations primitives du premier ordre soient

$$F(x, y, y', a) = 0, \overline{F}(x, y, y', b) = 0;$$

a et b, étant les deux constantes arbitraires.

En regardant ces deux quantités a et b, comme des fonctions de x, y, y', déterminées par ces mêmes équations, on trouvera, par l'analyse exposée ci-dessus, les deux équations identiques.

$$(y'' + f(x, y, y')) \times \frac{F'(y')}{F'(a)} = -a',$$

$$(y'' + f(x, y, y')) \times \frac{\overline{F}'(y')}{\overline{F}'(b)} = -b'.$$

Soit maintenant $\Phi(a, b)$ une fonction quelconque de a, b, sa fonction dérivée $\Phi'(a, b)$ sera représentée par $a' \Phi'(a) + b' \Phi'(b)$; de sorte qu'en multipliant la première des équations précédentes par $\Phi'(a)$, la seconde par $\Phi'(b)$, et les ajoutant ensemble on aura

$$y'' f(x, y, y')) \times \left(\frac{F'(y') \times \Phi'(a)}{F'(a)} + \frac{\overline{F}'(y') \times \Phi'(b)}{\overline{F}'(b)}\right)$$

$$= -\Phi'(a, b).$$

On aura ainsi cette formule générale pour le multiplicateur de l'équation proposée,

$$\frac{F'(y') \times \Phi'(a)}{F'(a)} + \frac{\overline{F}(y') \times \Phi'(b)}{\overline{F}'(b)},$$

En supposant a et b déterminés par les deux équations.

$$F(x, y, y', a) = 0, \overline{F}(x, y, y', b) = 0,$$

et le premier membre de l'équation deviendra alors $-\Phi(a, b)$; de sorte que l'on aura sur-le-champ l'équation primitive $\Phi(a, b) = const.$

De même si on prend une autre fonction quelconque de, a et b, représentée par $\Psi(a, b)$, on en tirera de même l'équation primitive $\Psi(a, b) = const.$

Ces deux équations donneront donc a et b égales à des constantes, quelles que soient les fonctions désignées par les caractèristiques Φ et Ψ, ce qui redonnera les mêmes équations primitives d'où l'on était parti; d'où l'on voit comment ces équations se trouvent indépendantes des fonctions arbitraires, qui peuvent entrer dans les multiplicateurs.

On peut appliquer cette théorie aux équations dérivées des ordres supérieurs au second, et en tirer des conclusions semblables.

On peut donc toujours trouver la forme générale des multiplicateurs, lorsqu'on connaît les équations primitives; mais comme ces multiplicateurs four-

nissent eux-mêmes un moyen de parvenir aux équations primitives, il serait important de pouvoir les trouver à *posteriori*, d'après les équations dérivées. Euler, et d'autres après lui, se sont occupés de cette recherche ; mais c'est un de ces problèmes, dont on ne saurait espérer une solution générale.

Pour donner un exemple de ce que nous venons d'exposer, prenons l'équation du second ordre

$$x\,y'' - y' = 0,$$

que nous avons trouvés plus haut. J'observe d'abord que, dans l'état où elle est, son premier membre est déjà une fonction dérivée exacte ; car, puisque

$(x\,y')' = x\,y'' + y'$ on a $x\,y'' = (x\,y')' - y'$,

de sorte qu'on peut la mettre sous la forme

$(x\,y')' - 2\,y' = 0$; d'où l'on tire sur-le-champ l'équation primitive du premier ordre.

$$x\,y' - 2\,y + A = 0.$$

A étant une constante arbitraire.

Pour avoir l'équation primitive de celle-ci, je cherche un multiplicateur qui rende son premier membre une fonction dérivée exacte, et il est facile de voir que cela aura lieu en divisant l'équation par x^3 ; de sorte que le multiplicateur sera $\frac{1}{x^3}$.

En effet elle devient par là

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{A}{x^3} + o,$$

et la fonction primitive du premier membre, est

$$\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2};$$

de sorte qu'on aura l'équation primitive

$$\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2} + B = o,$$

savoir en multipliant par x^2

$$y + Bx^2 - \frac{A}{2} = o,$$

B étant aussi une constante arbitraire.

Cette équation contenant ainsi deux constantes arbitraires, A et B, sera l'équation primitive complette, de l'équation proposée du second ordre, et on voit eneffet qu'elle coincide avec l'équation

$$x^2 - 2ay + a^2 + b = o$$

d'où la proposée avait été dérivée; puisqu'il n'y a qu'à la diviser par B, et faire

$$B = -\frac{1}{2a}, \text{ et } -\frac{A}{2B} = a^2 + b.$$

Mais au lieu de chercher, comme on vient de le faire, l'équation primitive de la primitive du premier ordre, on peut chercher une autre équation primi-

tive de la proposée; et pour cela, j'observe que la fonction dérivée de $x^m y'^n$ est

$$m x^{m-1} y'^n + n x^m y'^{n-1} y''$$

$$= x^{m-1} y'^{n-1} (m y' + n x y'')$$

ainsi la proposée étant

$$x y'' - y' = 0,$$

on voit qu'en faisant $m = -1$, $n = 1$, son premier membre, deviendra une fonction dérivée exacte, étant multipliée par x^{-2}, ou $\frac{1}{x^2}$; et l'on aura la nouvelle équation primitive

$$\frac{y'}{x} + B = 0.$$

Combinant donc cette équation avec l'équation

$$x y' - 2 y + A = 0$$

trouvée précédemment, pour en éliminer y', on aura l'équation en x et y,

$$-B x^2 - 2 y + A = 0,$$

qui, à raison des deux constantes arbitraires A et B, sera aussi l'équation primitive complète de la proposée. En effet, elle se réduira à la même forme

$$x^2 - 2 a y + a^2 + b = 0,$$

étant divisé par $-B$, et faisant

$$\frac{1}{B} = -a, -\frac{A}{B} = a^2 + b.$$

Nous

Nous allons maintenant chercher les caractères généraux, par lesquels on peut reconnaître si une fonction donnée de x, y, y', y'' etc, est une fonction dérivée exacte. Ce problême est, comme l'on voit, nécessaire pour la recherche des multiplicateurs; mais il l'est aussi pour d'autres recherches d'analise. Les géomètres s'en sont beaucoup occupés, presque au moment de la naissance du calcul différentiel; et ils sont enfin parvenus à une solution générale. La méthode par laquelle nous allons le résoudre, mérite particulièrement leur attention, parce qu'elle est applicable à toutes les questions du même genre.

LEÇON QUATORZIÈME.

Des équations de conditions, par lesquelles on peut reconnaître, si une fonction d'un ordre quelconque, de plusieurs variables, est une fonction dérivée exacte.

J'appelle en général fonction du premier ordre, toute fonction qui contient des fonctions dérivées du premier ordre, soit qu'elle soit elle-même une fonction dérivée ou non. J'appelle de même fonction du second ordre, toute fonction qui contient des fonctions dérivées du second ordre, soit qu'elle soit ou non une fonction dérivée ; et ainsi de suite.

Ainsi si V est une fonction quelconque de x, y et y', ce sera une fonction du premier ordre ; si V est une fonction quelconque de x, y et y' ce sera une fonction du second ordre ; et en général V sera une fonction de l'ordre n^{eme}, si elle contient x, y, y', y'', y''' etc. jusqu'à $y^{(n)}$, où seulement quelques-unes de ces quantités, pourvu qu'elle contienne $y^{(n)}$

Considérons une fonction V d'un ordre quelconque des variables x et y. Il est clair que si y était une fonction donnée ou connue de x, la fonction V deviendrait une simple fonction de x, et dans cet état, elle serait ou pourrait être censée être une fonction dérivée exacte ; car si elle n'a pas naturellement une fonction primitive, on peut toujours en

trouver une par les séries, soit en résolvant la fonction donnée en série de puissances de x, et prenant ensuite la fonction dérivée de chaque terme; soit en employant la série générale (Leçon XII.)

$$y = y^0 + y^{0\prime} x + y^{0\prime\prime} \frac{x^2}{2} + \text{etc.}$$

Et supposant que y' soit la fonction proposée en x, dont par conséquent y sera la fonction primitive.

Mais lorsqu'on regarde y comme une fonction indéterminée de x alors la fonction V ne peut devenir une fonction dérivée exacte, qu'en satisfaisant à certaines conditions.

En effet, supposons que V soit une fonction dérivée exacte de l'ordre n^{eme}, dont la fonction primitive de l'ordre immédiatement inférieur soit

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}).$$

On a donc par l'hypothèse

$$V = F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

Et séparant dans la fonction dérivée $F' \ldots'$ la partie relative à $y^{(n-1)}$, on aura

$$V = F'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}) + y^{(n)} F'(y^{(n-1)})$$

D'où l'on voit que la fonction V ne peut-être que de la forme

$$V = \downarrow (x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

$$+ y^{(n)} \varphi (x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

Les caractéristiques φ et $\downarrow$, dénotant des fonctions inconnues des quantités x, y, y' etc, $y^{(n-1)}$

Et il faudra qu'il y ait entre ces fonctions une relation telle que l'on ait.

$$\downarrow (x, y . y' \ldots y^{(n-1)}) = F' (x, y, y' \ldots y^{(n-2)}),$$

$$\varphi (x, y, y' \ldots . y^{(n-1)}) = F' (y^{(n-1)})$$

Considérons dans la fonction φ la quantité $y^{(n-1)}$, comme seule variable, et prenons la fonction primitive relativement à cette seule variable. Si on dénote par

$$\Phi (x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

cette fonction primitive, elle sera en même tems la fonction primitive de la partie

$$y^{(n)} F' (y^{(n-1)})$$

relative à la variation de $y^{(n-1)}$. Elle ne pourra donc différer de la valeur de

$$F (x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

que d'une quantité indédendante de $y^{(n-1)}$.

On aura donc

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = \Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) + U,$$

U étant une constante relativement à $y^{(n-1)}$, et qui pourra être une fonction quelconque de

$$x, y, y' \text{ etc}, y^{(n-2)} \text{ sans } y^{(n-1)}$$

Prenant maintenant les fonctions dérivées relativement à x, y, y' etc : $y^{(n-1)}$ on aura

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}) = \Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}) + U'$$

où U' est la fonction dérivée complette de U puisque U ne contient que x, y, y' etc $y^{(n-2)}$.

Ainsi on aura

$$\psi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)} = \Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) + U'$$

Et par conséquent

$$U' = \psi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) - \Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)})$$

D'où il s'ensuit que la fonction

$$\downarrow(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) - \Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-2)})$$

doit être elle même une fonction dérivée exacte d'une fonction de $x, y, y' \ldots y^{(n-2)}$

Ainsi la question de rendre une fonction de l'ordre ^{neme}. une dérivée exacte, est réduite à rendre une autre fonction de l'ordre $(n-1)^{eme}$, une dérivée exacte. Et ainsi de suite.

En procédant ainsi par dégrés, on peut trouver, non-seulement les conditions pour qu'une fonction donnée d'un ordre quelconque, soit la dérivée exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur; mais encore cette fonction même qui en sera la fonction primitive.

Soit donnée par exemple la fonction du second ordre

$$\frac{y^3}{y} - \frac{x y'^2}{y^2} + \frac{y'' x}{y}$$

En la comparant à la formule générale, on aura $n = 2$, et

$$\downarrow(x, y, y') = \frac{y'}{y} - \frac{x y'^2}{y^2}, \quad \varphi(x, y, y') = \frac{x}{y}$$

Considérant y' comme la seule variable, la fonction

primitive de $\frac{x}{y}$ sera $\frac{x}{y}y' = \Phi(x, y, y')$.

de sorte qu'on aura

$$F(x, y, y') = \frac{x}{y}y' + U$$

U étant fonction de x et y seulement.

Or en ne faisant varier que x et y, on aura

$$\Phi'(x, y) = \frac{y'}{y} - \frac{x\,y'^2}{y^2}$$

donc on aura

$$U' = \frac{y'}{y} - \frac{x\,y'^2}{y^2} - \frac{y'}{y} + \frac{x\,y'^2}{y^2} = 0$$

Donc U = K, K étant une constante quelconque; par conséquent la fonction primitive $F(x, y, y')$ de la proposée sera

$$\frac{x\,y'}{y} + K;$$

comme il est facile de s'en assurer.

Lorsque la fonction proposée ne sera pas une dérivée exacte, alors dans la suite des fonctions qui doivent être en même tems des dérivées exactes, il s'en trouvera une qui, par sa forme, ne pourra pas l'être; et on en conclura que la fonction proposée ne saurait l'être non plus dans l'état où elle est. Mais comme dans les fonctions d'uu ordre un peu élevé,

les opérations qu'on aurait à exécuter pour pouvoir s'assurer si elles sont des dérivées exactes, pourraient rendre cette recherche assez pénible, il est utile d'avoir descaractères généraux, par lesquels on puisse juger immédiatement si une fonction d'un ordre quelconque est, ou non, une dérivée exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur, ou même d'un ordre inférieur quelconque. Ce sont ces caractères qu'on connait dans le calcul différentiel, sous le nom de conditions d'intégrabilité, et qu'Euler et Condorcet ont réduits à des formules générales et élégantes.

L'analise que nous allons exposer, ne laisera rien à désirer sur ce sujet.

Supposons que la fonction V d'un ordre quelconque soit la fonction dérivée exacte de la fonction U de l'ordre immédiatement inférieur, indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y; il est clair que si dans ces deux fonctions on substitue à la fois $y + \omega$ à la place de y, et conséquemment $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$ etc; à la place de y', y'' etc; en supposant ω une fonction indéterminée de x, ces fonctions continueront à être l'une la fonction dérivée exacte de l'autre, puisque cette dérivation ne dépend point de la valeur de y. Donc elles le seront encore si après ces substitutions on les développe suivant les puissances et les produits de ω, ω', ω'' etc :

Dénotons par U la totalité des termes du développemen

pement de U où les quanrités ω, ω', ω'' etc ne se trouveront qu'à la première dimension, par $\overset{2}{U}$ la totalité des termes, où ces quantités formeront deux dimensions, etc.

Dénotons de même par $\overset{1}{V}$ la totalité des termes du développement de V où les mêmes quantités ω, ω', ω'' etc se trouveront à la première dimension, par $\overset{2}{V}$ la totalité des termes où ces quantités formeront deux dimensions, etc.

On aura

$$U + \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U} + \text{etc};$$

pour le développement de U, et

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{etc},$$

pour le développement de V.

Cette dernière série sera donc la fonction dérivée exacte de la première, et je vais prouver que chaque terme de l'une sera la fonction dérivée exacte du terme correspondant de l'autre.

Car si au lieu de substituer simplement

$$y + \omega, y' + \omega', y'' + \omega'' \text{ etc},$$

à la place de

$$y, y', y'', \text{etc};$$

on avoit substitué

$$y + m\omega,\ y' + m\omega',\ y'' + m\omega'' \text{ etc},$$

m étant une constante quelconque indéterminée ; la transformée de V serait également la dérivée exacte de la transformée de U, quelle que puisse-être la valeur de m. Or il est visible que par ces substitutions les fonctions U et V deviendroient

$$U + m\overset{1}{U} + m^2\overset{2}{U} + m^3\overset{3}{U} + \text{etc};$$

$$V + m\overset{1}{V} + m^2\overset{2}{V} + m^3\overset{3}{V} + \text{etc};$$

ainsi la seconde de ces deux series seroit la dérivée exacte de la première; donc en retranchant les premier termes U, V, dont l'un est par l'hypothèse la dérivée exacte de l'autre, et divisant par la constante m on aura les deux séries

$$\overset{1}{U} + m\overset{2}{U} + m^2\overset{3}{U} + \text{etc};$$

$$\overset{1}{V} + m\overset{2}{V} + m^2\overset{3}{V} + \text{etc.}$$

dont la seconde devra être la dérivée exacte de la première quelle que soit la constante m. D'où il est facile de conclure que les termes

$$\overset{1}{V},\ \overset{2}{V},\ \overset{3}{V} \text{ etc:}$$

devront être chacun en particulier la dérivée exacte des termes correspondans

$$\overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \overset{3}{U} \text{ etc.}$$

Car d'abord en faisant $m = 0$ il s'ensuivra que $\overset{1}{V}$

sera la dérivée exacte de $\overset{1}{U}$; donc retranchant les premiers termes de part et d'autre, et divisant par m, on aura les séries

$$\overset{2}{U} + m\overset{3}{U} + m^2\overset{4}{U} + \text{etc},$$

$$\overset{2}{V} + m\overset{3}{V} + m^2\overset{4}{V} + \text{etc},$$

dont la seconde sera la dérivée exacte de la première; et ainsi de suite.

En général, comme la fonction $\overset{1}{V}$ ne contient les quantités ω, ω', ω'' etc, qu'à la première dimension, il est facile de s'assurer que tant que ces quantités demeurent indéterminées, sa fonction primitive ne peut contenir aussi que les premières dimensions des mêmes quantités; par conséquent il n'y a que le terme $\overset{1}{U}$ qui puisse être sa fonction primitive. Il en est de même des termes $\overset{2}{V}$ et $\overset{2}{U}$ où ces quantités montent à la seconde dimension; et ainsi de suite.

Il faut donc d'abord que la fonction $\overset{1}{V}$, soit une dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre x, y et ω. Or, puisque $\overset{1}{V}$ est la partie du développement de V, qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'' etc, il est clair que cette fonction ne peut être que de la forme

$$\overset{1}{V} = N\,\omega + P\,\omega' + Q\,\omega'' + R\,\omega''' + \text{etc.}$$

les coéficiens N , P , Q etc , étant des fonctions de x , y , y' , y'' etc , sans ω. Ainsi tout se réduit à trouver les conditions nécessaires pour qu'une fonction de cette forme soit, généralement parlant, une dérivée exacte.

Si on considère les fonctions dérivées du produit de deux quantités quelconques, et qu'on dénote comme nous l'avons indiqué à la fin de la leçon II, par des traits appliqués aux parenthèses, les fonctions dérivées des quantités renfermés entre les parenthèses, on a

$$(P\,\omega)' = P\,\omega' + P'\,\omega$$

donc

$$P\,\omega' = (P\,\omega)' - P'\,\omega,$$

On a de la même manière

$$Q\,\omega'' = (Q'\omega')' - Q'\,\omega'\text{; et}$$

$$Q'\,\omega' = (Q'\,\omega)' - Q''\,\omega \text{ donc}$$

$$Q\,\omega'' = (Q\,\omega')' - (Q'\,\omega)' + Q''\,\omega,$$

Et l'on trouve pareillement

$$R\,\omega''' = (R\,\omega'')' - (R'\,\omega')' + (R''\,\omega)' - R'''\,\omega$$

Et ainsi de suite.

Faisant ces substitutions dans l'expression de $\overset{1}{V}$, elle deviendra

$$\overset{1}{V} = (N - P' + Q'' - R''' + \text{etc.})\,\omega$$
$$+ (P\omega)' - (Q'\omega)' + (R''\omega)' - \text{etc}$$
$$+ (Q\omega')' - (R'\omega')' + \text{etc.}$$
$$+ (R\omega'')' - \text{etc.}$$
$$\text{Etc.}$$

Comme tous les membres de cette expression, excepté le premier, sont des fonctions dérivées exactes, il faudra que le premier membre en soit une aussi en particulier ; or ce membre étant de la forme

$$(N - P' + Q'' - R''' + \text{etc.})\,\omega$$

où N, P, Q etc, sont des fonctions de x, y, y' etc, sans ω, il est visible qu'il est impossible que cette formule devienne une fonction dérivée exacte, par rapport à ces variables, et à la variable ω, indépendamment d'aucune relative entre ces variables.

D'où il s'ensuit que la fonction $\overset{1}{V}$, ne saurait devenir une fonction dérivée exacte, à moins que la formule dont il s'agit ne disparaisse d'elle-même.

Ce qui donne l'équation

$$N - P' + Q'' - R''' + \text{etc}, = 0.$$

Laquelle devant avoir lieu indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y, devra être entièrement identique.

Telle est donc l'équation de condition nécessaire,

pour que la fonction $\overset{1}{V}$ devienne une fonction dérivée exacte ; et il est visible que cette équation ayant lieu, sa fonction primitive sera

$$(P - Q' + R'' - \text{etc} :)\ \omega + (Q - R' + \text{etc})\ \omega' + (R - \text{etc} ,)\ '' + \text{etc.}$$

Maintenant je vais prouver que si la fonction $\overset{1}{V}$ est une fonction dérivée exacte, la fonction V en sera nécessairement une aussi. Pour cela je vais d'abord prouver que les fonctions $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$ etc, seront chacune en particulier des dérivées exactes.

Puisque la fonction $\overset{1}{V}$ est supposée une dérivée exacte d'une fonction de

$$x , y , y' \text{ etc}, \omega , \omega' \text{ etc} ,$$

si on met dans l'une et dans l'autre de ces fonctions $y + n\omega$ à la place de y, et par conséquent aussi

$$y' + n\omega' , y'' + n\omega'' \text{ etc} ,$$

à la place de y', y'' etc : n étant une constante quelconque arbitraire, la première sera encore une fonction dérivée exacte de la seconde; et elle le sera aussi étant développée suivant les puissances et les dimensions de

$$\omega , \omega' , \omega'' \text{ etc.}$$

Supposons que par ces substitutions, et ce développement la fonction V devienne $\overset{1}{}$

$$\overset{1}{V} + n \overset{1}{V}_{1} + n^2 \overset{1}{V}_{2} + n^3 \overset{1}{V}_{3} + \text{etc},$$

chacune des fonctions

$$\overset{1}{V}_{1}, \overset{1}{V}_{2}, \overset{1}{V}_{3} \text{ etc :}$$

sera nécessairement, à cause de la constante indéterminée n, une fonction dérivée exacte.

Supposons ensuite que la fonction $\overset{2}{V}$ devienne par les mêmes substitutions et développemens

$$\overset{2}{V} + n \overset{2}{V}_{1} + n^2 \overset{2}{V}_{2} + n^3 \overset{2}{V}_{3} + \text{etc},$$

Et que la fonction $\overset{3}{V}$ devienne pareillement

$$\overset{3}{V} + n \overset{3}{V}_{1} + n^2 \overset{3}{V}_{2} + n^3 \overset{3}{V}_{3} + \text{etc};$$

et ainsi de suite.

Or la fonction V est supposée devenir

$$V + m \overset{1}{V} + m^2 \overset{2}{V} + \text{etc :}$$

par la substitution de $y + m\omega$, $y' + m\omega'$ etc à la place de y, y' etc

Donc par la substitution de

$$y + n\omega, y' + n\omega' \text{ etc},$$

au lieu de y, y' etc , elle deviendra

$$V + n \overset{1}{V} + n^2 \overset{2}{V} + n^3 \overset{3}{V} + \text{etc:}$$

Par conséquent si dans la formule

$$V + m \overset{1}{V} + m^2 \overset{2}{V} + m^3 \overset{3}{V} + \text{etc}$$

on fait ces mêmes substitutions de

$$y + n\omega \ , y' + n\omega' \text{ etc},$$

à la place de y, y' etc : et qu'on développe les termes suivant les puissances de ω, ω' etc , elle deviendra

$$V + n \overset{1}{V} + n^2 \overset{2}{V} + n^3 \overset{3}{V} + \text{etc},$$

$$+ m \overset{1}{V} + m n \overset{1}{V}_1 + m n^2 \overset{1}{V}_2 + \text{etc},$$

$$+ m^2 \overset{2}{V} + m^2 n \overset{2}{V}_1 + \text{etc},$$

$$+ m^3 \overset{3}{V} + \text{etc},$$

Etc.

D'un autre côté cette même formule

$$V + m \overset{1}{V} + m^2 \overset{2}{V} + \text{etc},$$

étant déjà le résultat de la substitution de

$$y + m\omega \ , y' + m\omega' \text{ etc:}$$

à la place de y, y' etc : dans la fonction U , il est clair que

que le résultat de la nouvelle substitution de

$$y + n\omega, y' + n\omega' \text{ etc.}$$

à la place de y, y' etc : ne pourra être autre chose que le résultat des substitutions simultanées de

$$y + (m+n)\omega, y' + (m+n)\omega' \text{ etc},$$

à la place de y, y' etc, dans la même fonction V, et que ce résultat sera en changeant n en $m+n$

$$V + (m+n)\overset{1}{V} + (m+n)^2\overset{2}{V}$$

$$+ (m+n)^3\overset{3}{V} + \text{etc.}$$

Ces deux résultâts doivent donc être identiques, et à cause des deux constantes indéterminées m et n il faudra que les termes affectés des mêmes puissances de m et n soient identiques de part et d'autre.

Comparant les termes affectés de m, mn, mn^2, mn^3 etc, on aura donc

$$\overset{1}{V} = \overset{1}{V}, \underset{1}{\overset{1}{V}} = 2\overset{2}{V}, \underset{2}{\overset{1}{V}} = 3\overset{3}{V}, \underset{3}{\overset{1}{V}} = 4\overset{4}{V} \text{ etc.}$$

Donc

$$\overset{2}{V} = \frac{1}{2}\underset{2}{\overset{1}{V}}, \overset{3}{V} = \frac{1}{3}\underset{2}{\overset{1}{V}} = \frac{1}{4}\underset{3}{\overset{1}{V}} \text{ etc.}$$

La comparaison des autres termes fournira d'autres relations, que nous omettons parce qu'elles ne sont point nécessaires pour notre objet.

Donc puisqu'on a déjà vu que les fonctions

$$\overset{1}{V}_1, \overset{1}{V}_2, \overset{1}{V}_3 \text{ etc},$$

sont nécessairement des fonctions dérivées exactes dès que la fonction $\overset{1}{V}$ en est une, il s'ensuit que les fonctions $\overset{2}{V}$, $\overset{3}{V}$ etc, le seront aussi.

Cela posé comme par la simple substitution de $y + \omega, y' + \omega', y'' + \omega''$ etc, à la place de y, y', y'' etc, la fonction V devient

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{etc},$$

Si on désigne par (V) le résultat de cette substitution, on aura

$$(V) = V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{etc.}$$

Et il s'ensuivra que (V) — V sera nécessairement une fonction dérivée exacte, dès que $\overset{1}{V}$ en sera une, quelle que puisse être la valeur de ω.

Faisons $\omega = -y$, ce qui est permis, puisque ω désigne une quantité indéterminée ; alors

$$y + \omega y' + \omega', y'' + \omega'' \text{ etc},$$

deviendront toutes égales à zéro, et la fonction (V) ne contiendra plus y ; mais seulement x, puisque y, y', y'' etc, ont disparu ; cette fonction sera

donc, ou pourra toujours être censée une fonction dérivée exacte, puisqu'elle n'est plus fonction que d'une seule variable x; donc la fonction V sera aussi nécessairement une fonction dérivée exacte, dès que la fonction $\overset{1}{V}$ le sera.

On peut de plus, par l'analyse précédente, avoir l'expression de la fonction primitive de V.

En effet, nous avons vu d'un côté que $\overset{1}{V}$ est la fonction dérivée de $\overset{1}{U}$; et nous avons trouvé d'un autre côté, que la fonction primitive de $\overset{1}{V}$ est

$$(P - Q' + R'' - \text{etc.})\,\omega + (Q - R' + \text{etc.})\,\omega' + \text{etc.}$$

On aura donc

$$\overset{1}{U} = (P - Q' + R'' - \text{etc.})\,\omega + (Q - R + \text{etc.})\,\omega' + (R - \text{etc.})\,\omega'' + \text{etc.}$$

Ensuite si on substitue dans cette fonction, à la place de y, y', y'' etc,

$$y + n\omega, y' + n\omega', y'' + n\omega'' \text{ etc};$$

et que par le développement suivant les puissances de ω, ω' etc, la fonction $\overset{1}{U}$ devienne

$$\overset{1}{U} + \overset{1}{U}_1 + \overset{1}{U}_2 + \overset{1}{U}_3 + \text{etc},$$

on démontrera, comme on l'a fait ci-dessus, à l'égard de la fonction $\overset{1}{V}$, que l'on aura

$$\overset{2}{U} = \frac{1}{2}\overset{1}{U}_1, \overset{3}{U} = \frac{1}{3}\overset{1}{U}_2, \overset{4}{U} = \frac{1}{4}\overset{1}{U}_3 \text{ etc.}$$

Ainsi on aura la série

$$\overset{1}{U} + \frac{1}{2}\overset{1}{U}_1 + \frac{1}{3}\overset{1}{U}_2 + \frac{1}{4}\overset{1}{U}_3 + \text{etc},$$

pour la fonction primitive de $\overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{etc}$, c'est à dire de $(V) - V$. Si donc on fait

$$\omega = -y, \omega' = -y', \omega'' = -y'' \text{ etc},$$

dans les expressions connues de

$$\overset{1}{U}, \overset{1}{U}_1, \overset{1}{U}_2 \text{ etc},$$

et qu'on dénote par (U) la valeur de la série

$$\overset{1}{U} + \frac{1}{2}\overset{1}{U}_1 + \frac{1}{3}\overset{1}{U}_2 + \text{etc},$$

on aura (U) pour la fonction primitive de $(V) - V$, et comme (V) est alors la valeur de V en y faisant $y, y' y''$ etc nuls, laquelle devient une simple fonction de x, si on dénote sa fonction primitive par X, on aura $X - (U)$ pour la fonction primitive de la fonction proposée V. Ainsi on peut, de cette manière, avoir directement la fonction pri-

mitive de la proposée, lorsqu'elle satisfait à l'équation de condition. Comme l'expression de (U) est en série, elle sera de peu d'usage sous cette forme ; mais la formule que nous venons de trouver, sert toujours à prouver l'existence de la fonction primitive.

Si on représente, en général, la fonction V par

$$f(x, y', y', y'' \text{ etc},)$$

et qu'on dénote comme on l'a fait jusqu'ici par $f'(y)$ la fonction dérivée par rapport à y seul; qu'on dénote de même par $f'(y')$ la fonction dérivée par rapport à y' seul, regardé comme une variable particulière, par $f'(y'')$ la fonction dérivée par rapport à y'' seul; et ainsi de suite. Il est facile de voir que puisque

$$V = N\,\omega + P\,\omega' + Q\,\omega'' + \text{etc},$$

est la partie du développement de V, qui contient les premières puissances de ω, ω' etc, après la substitution de

$$y + \omega, y' + \omega', y'' + \omega'' \text{ etc},$$

à la place de y, y', y'', etc. Il est facile de voir, dis-je, par la formation des fonctions dérivées que l'on aura,

$$N = f'(y), P = f'(y'), Q = f'(y'') \text{ etc.}$$

D'où l'on conclud enfin que l'équation de condition pour qu'une fonction quelconque

$$f(x, y, y', y'', y''' \text{ etc})$$

soit une fonction dérivée exacte, sera

$$f'(y) - (f'(y'))' + (f'(y''))'' - \text{etc} = 0$$

et que réciproquement, lorsque cette équation aura lieu identiquement, la fonction dont il s'agit sera nécessairement une fonction dérivée exacte.

Si on désigne par

$$F(x, y, y', y'' \text{ etc})$$

sa fonction primitive, et qu'on se rappelle que

$\overset{1}{U}$ étant la partie du développement de U, qui contient les premières puissances de ω, ω', ω'' etc, on a trouvé

$$\overset{1}{V} = (P - Q' + R'' - \text{etc} :)\omega + (Q - R' + \text{etc} :)\omega' + \text{etc}$$

il est clair qu'on aura

$$\begin{aligned} P - Q' + R'' - \text{etc} :&= F'(y), \\ Q - R' + \text{etc}, &= F'(y') \\ R - \text{etc} :&= F'(y''), \\ &\text{Etc.} \end{aligned}$$

Donc substituant les valeurs de P, Q, R etc, on aura

$$\begin{aligned} F'(y) &= f'(y') - f'(y'') + f'(y''') - \text{etc}, \\ F'(y') &= f'(y'') - f'(y''') + \text{etc}, \\ F'(y'') &= f'(y''') - \text{etc}, \\ &\text{Etc.} \end{aligned}$$

Or la fonction dérivée de

$$F(x, y, y', y''\ldots)$$

est représentée par

$$F(x) + y' F'(y) + y'' F'(y') + y''' F'(y'') + \text{etc},$$

et comme cette fonction est par l'hypothèse égale à

$$f(x, y, y', y'', y''' \text{ etc} \cdot)$$

on aura en substituant les valeurs précédentes

$$f(x, y, y', y'', y''' \ldots) = F'(x) + y' f'(y')$$
$$-(y' - y'') f'(y'') + (y' - y'' + y''') f'(y''') - \text{etc}.$$

Et telle est la forme que doit avoir la fonction proposée pour pouvoir être une fonction dérivée exacte.

Ainsi on aura

$$F'(x) = f(x, y, y', y'', y''' \text{ etc},) - y' f'(y')$$
$$+(y' - y'') f'(y'') - (y' - y'' + y''') f'(y''') + \text{etc}.$$

De sorte qu'on aura par ces formules, les fonctions dérivées de la fonction primitive cherchée, prises par rapport à chacune des quantités x, y, y', y'' etc, en particulier, ce qui servira à faciliter la recherche de cette fonction.

Supposons d'abord pour donner quelques exemples que la fonction proposée ne soit qu'une fonction du premier ordre représentée par $f(x, y, y';)$ l'équation de condition pour qu'elle soit une fonction dérivée exacte

$$f'(y) - (f'(y'))' = 0.$$

Pour que cette équation puisse être identique il

faut que dans le second terme il ne se trouve pas des fonctions dérivées de y plus hautes que dans le premier terme $f'(y)$; or celui-ci ne peut contenir que la fonction y', donc il faudra que l'expression $f'(y')$ dont la fonction dérivée forme le second terme ne contienne pas y' ; autrement il entreroit y'' dans le second terme. Il s'ensuit de là que la fonction $f(x, y, y')$ ne peut être que de la forme $\downarrow(x, y) + y' \varphi(x, y)$, les caractéristiques $\downarrow$ et φ désignant des fonctions quelconques de x et y sans y'.

Soit donc

$$\downarrow(x, y) + y' \varphi(x, y)$$

la fonction proposée, en la représentant par $f(x, y, y')$ et prenant les fonctions dérivées relativement à y et y', on a

$$f'(y) = \downarrow'(y) + y' \varphi'(y), f'(y') = \varphi(x, y).$$

Ainsi l'équation de condition sera

$$\downarrow'(y) + y' \varphi'(y) - \varphi'(x, y) = 0$$

Mais $\varphi'(x, y) = \varphi'(x) + y' \varphi'(y)$ donc l'équation se réduit à

$$\downarrow'(y) - \varphi'(x) = 0 ;$$

ce qui est conforme a ce que l'on sait depuis long tems.

Si on désigne par $F(x, y)$ la fonction primitive de $f(x, y, y')$ on aura par les formules données plus haut, à cause de $f''(y'') = 0$,

$$F'(y) = f'(y') = \varphi(x, y),$$

$$F'(x) = f(x, y, y') - y'f'(y') = \psi(x, y).$$

Ainsi pour trouver la fonction primitive $F(x, y)$ il n'y aura qu'à chercher la fonction primitive de $\varphi(x, y)$ par rapport à y seul, et la fonction primitive de $\psi(x, y)$ par rapport à x seul ; si elles s'accordent on aura la vraie valeur de $F(x, y)$. Si elle diffèrent, ce ne peut être qu'à cause de l'addition qu'on peut faire à la première d'une fonction de x qui y est regardée comme constante, et à la seconde d'une fonction de y qui y est regardée comme constante, et il sera facile de déterminer ces fonctions pour qu'elles deviennent identiques.

Nous avons vu dans la leçon précédente que toute équation du premier ordre de la forme

$$y' + f(x, y) = 0$$

a nécessairement un multiplicateur, fonction de x et y, qui peut rendre son premier membre une fonction dérivée exacte.

Si donc on désigne ce multiplicateur par $\varphi(x, y)$, il faudra que la fonction

$$y'\varphi(x, y) + f(x, y) \times \varphi(x, y)$$

soit une dérivée exacte.

Donc en supposant

$$\psi(x, y) = f(x, y) \times \varphi(x, y),$$

on aura l'équation de condition

$$\psi'(y) - \varphi'(x) = 0$$

Mais

$\psi'(y) = f(x,y) \times \varphi'(y) + \varphi(x,y) \times f'(y)$;
donc l'équation de condition sera

$$\varphi(x,y) \times f'(y) + f(x,y) \times \varphi'(y) - \varphi'(x) = 0.$$

et toute fonction $\varphi(x,y)$ qui satisfera à cette équation pourra servir de multiplicateur à l'équation proposée

Supposons que la fonction proposée soit du second ordre, c'est-à-dire $f(x,y,y',y'')$, l'équation de condition, pour qu'elle soit une dérivée exacte, sera

$$f'(y) - \left(f'(y')\right)' + \left(f'(y'')\right)'' = 0.$$

Il est d'abord évident que pour que cette équation puisse être identique, il faut que la valeur de $f'(y'')$ ne contienne point y''; car si elle contenait y'', la valeur de $\left(f'(y'')\right)'$ contiendrait y^{IV};

mais les termes précédens ne peuvent contenir que y, y', y'' et y'''; donc le terme contenant y^{IV} ne pourrait pas être détruit.

La fonction proposée ne pourra donc être que de la forme

$$\psi(x,y,y', y + y'' \varphi(x,y,y');$$

On aura ainsi en comparant avec la formule générale $f(x, y, y', y'')$

$$f'(y) = \psi'(y) + y'' \varphi'(y)$$

$$f'(y') = \psi'(y') + y'' \varphi'(y')$$

$$f'(y'') = \varphi(x, y, y',)$$

Et l'équation de condition sera

$$\psi'(y) + y'' \varphi'(y) - (\psi'(y'))' - (y'' \varphi'(y'))' + \varphi''(x, y, y') = 0.$$

Or $\varphi'(x, y, y') = \varphi'(x) + y' \varphi'(y) + y'' \varphi'(y')$; donc $\varphi''(x, y, y') = (\varphi'(x))' + (y' \varphi'(y))' + (y'' \varphi'(y'))'$; par cette substitution, l'équation de condition deviendra

$$\psi'(y) + y'' \varphi'(y) - (\psi'(y'))' + (\varphi'(x))' + (y' \varphi'(y))' = 0.$$

Supposons pour abréger

$$\varphi'(x) + y' \varphi'(y) - \psi'(y'), = \Phi(x, y, y'),$$

la caractéristique Φ dénotant une fonction connue de x, y, y', puisqu'en effet cette expression ne

contient que les trois variables , x, y, y' ; on l'équation

$$\psi'(\ ) + y''\varphi'(y) + \Phi'(x, y, y') =$$

Mais $\Phi'(x, y, y') = \Phi'(x) + y'\Phi'(y) + y''\Phi'$

donc l'équation deviendra

$$\psi'(y + \Phi'(x) + y'\Phi'(y) + y''\left(\varphi'(y) + \Phi'(y')\right)$$

Or, il est visible que la quantité y'' n'entre dans les fonctions dérivées $\psi'(y)$, $\Phi'(x)$. puisqu'elle n'entre point dans les fonctions sentées par les caractéristiques ψ, φ et Φ ; donc que l'équation puisse être identique, il faudr les termes multipliés par y'' disparaissent ; pa séquent l'équation de condition se partagera i sairement en ces deux-ci :

$$\varphi'(y) + \Phi'(y') = 0.$$

$$\psi'(y) + \Phi'(x) + y'\Phi'(y) = 0.$$

qui devront avoir lieu séparément, pour q fonction proposée

$$(x, y, y') + y''\varphi(x, y, y'$$

soit une fonction dérivée exacte.

Supposons, comme plus haut, que cette fo soit

$$\frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{y''x}{y}$$

On aura

$$\psi(x, y, y') = \frac{y'}{y} - \frac{x y'^2}{y^2}$$

$\varphi(x, y, y') = \frac{x}{y}$; donc $\psi'(y) = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2 x y'^2}{y^3}$

$\psi'(y') = \frac{1}{y} - \frac{2 x y'}{y^2}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2}$, $\varphi'(y) = -\frac{x}{y^2}$;

donc $\Phi(x, y, y') = \frac{1}{y} - \frac{x y'}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{2 x y'}{y^2}$

$= \frac{x y'}{y^2}$; et de là,

$$\Phi'(x) = \frac{y'}{y^2}, \Phi'(y) = -\frac{2 x y'}{y^3}, \Phi'(y') = \frac{x}{y^2}.$$

Ainsi les deux équations de condition deviendront

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0$$

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{2 x y'^2}{y^3} + \frac{y'}{y^2} - \frac{2 x y'^2}{y^3} = 0$$

qui sont, comme l'on voit, identiques.

La fonction proposée $\frac{y'}{y} - \frac{x y'^2}{y} + \frac{y'' x}{y}$ sera donc une dérivée exacte; et en effet elle est la dérivée de la fonction $\frac{x y'}{y}$ comme on l'a déjà vu.

En général il est facile de prouver que l'équation de condition

$$f'(y) - (f'(y'))' + (f'(y''))'' - \text{etc}, = 0$$

ne sauroit être identique, à moins que la plus haute des fonctions dérivées y', y'' etc, qui entrera dans la fonction $f(x, y', y''$ etc,) n'y soit qu'à la première dimension, afin qu'elle disparaisse dans la fonction dérivée qu'on prendra relativement à cette même dérivée de y. D'où il suit que si la fonction proposée est de l'ordre n, elle ne pourra être une fonction dérivée exacte, à moins qu'elle ne soit de la forme

$$\psi(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)})$$
$$+ y^{(n)} \varphi(, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}).$$

Ensuite on peut prouver aussi que de même que pour les fonctions du second ordre l'équation de condition se décompose en deux qui doivent avoir lieu à-la-fois, pour-les fonctions du troisième ordre elle se décomposera en trois, et pour les fonctions du quatrième ordre, elle se décomposera en quatre, et ainsi de suite.

Si la fonction proposée V contenoit non-seulement les variables x, y avec les dérivées y', y'' ect, mais de plus une autre variable z, fonction indéterminée de x avec ses dérivées z', z'' etc, on ferait par rapport à

tte dernière variable des raisonnemens et des opé-tions semblables à celles qu'on a faites relativement la variable y, et on parviendroit à une équation de ndition pour z entièrement analogue à celle qu'on trouvée pour y.

Ainsi pour qu'une fonction quelconque de x, y, z e la forme

$$f(x, y, y', y'' \text{ etc}, z, z', z'' \text{ etc},)$$

it une fonction dérivée exacte d'une fonction de ordre inférieur, indépendamment d'aucune rela-on particulière entre x, y et z, on aura les deux uations de condition

$$'(y) - (f'(y'))' + (f'(y''))'' - (f'(y'''))''' + \text{etc} = 0$$

$$(z) - (f'(z'))' + (f'(z''))'' - (f'(z'''))''' + \text{etc}, = 0;$$

réciproquement ces deux équations ayant lieu ntiquement, on sera assuré que la fonction pro-ée sera une fonction dérivée exacte, quelles que ent les fonctions y et z.

Enfin on trouverait facilement, par la même mé-thode, les conditions nécessaires, pour que la

fonction proposée fût une fonction dérivée du second ordre, ou d'un ordre supérieur.

Pour cela il faudrait que la fonction primitive de V fût elle-même une fonction dérivée. Or, on a trouvé que cette fonction primitive est représentée par

$$(P - Q' + R'' - \text{etc},)\,\omega + (Q - R' + \text{etc},)\,\omega' + (R - \text{etc},)\,\omega'' + \text{etc.}$$

Mettons, pour plus de simplicité, cette formule sous la forme

$$p\,\omega + q\,\omega' + r\,\omega'' + \text{etc.}$$

et changeons par les procédés qu'on a vus plus haut, le terme $q\,\omega'$ dans son équivalent $(q\,\omega)' - q'\,\omega$, le terme $r\,\omega''$ dans son équivalent $(r\,\omega')' - (r''\,\omega) + r''\,\omega$, et ainsi de suite: la formule dont il s'agit deviendra

$$(p - q' + r'' - \text{etc}:)\,\omega + (q\,\omega)' - (r'\,\omega) + \text{etc}: (r\,\omega') - \text{etc}:$$

dans laquelle tous les membres, excepté le premier, sont déjà des fonctions dérivées exactes; ainsi il faudra que la formule $(p - q' + r'' - \text{etc})\,\omega$, soit une fonction dérivée exacte; ce qui ne pouvant être, à cause de la variable indéterminée ω, il faudra que cette formule devienne identiquement nulle, ce qui donnera l'équation de condition

$$p - q' + r'' - \text{etc}, = 0$$

laquelle

laquelle en remettant les valeurs de p, q, r etc, devient

$$P - 2Q' + 3R'' - \text{etc}, = o.$$

Donc pour que la fonction

$$f(x, y, y', y'' \ldots)$$

soit une fonction derivée exacte du second ordre c'est à dire une fonction derivée d'une fonction dérivée indépendamment d'aucune relation particuliere, entre x et y, on aura relativement a y. outre la premiere equation de condition, encore celle-ci

$$f'(y') - 2\left(f'(y'')\right)' + 3\left(f'(y''')\right)''$$

$$- \text{etc}, = o.$$

Et l'on en aurait une pareille relativement à z, si la fonction proposée contenait aussi z, z'. z'' etc.

On trouverait de même, pour que la proposée fût une fonction dérivée du troisième ordre, cette troisième équation de condition, relativement à y

$$f'(y'') - 3\left(f'(y''')\right)' + 6\left(f'(y'''')\right)''.$$

$$- \text{etc} = o$$

Et ainsi du reste.

Enfin, si on suppose qu'on n'ait pour la détermination d'une fonction u, qu'une équation d'un ordre quelconque, entre x, y, u et les fonctions dérivées de y et u, et qu'on demande les conditions nécessaires, pour que u soit une fonction de x, y. y', y'', etc, d'un ordre inférieur, in-

dépendamment d'aucune relation entre x et y ; le problême pourra toujours se résoudre pour les mêmes principes, et en suivant la même méthode.

Soit $V = o$ l'équation donnée ; supposons qu'à la place de y, on substitue tant dans u que dans V, $y + \omega$, et ainsi $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$, etc, à la place de y', y'' etc ; ω étant une fonction indéterminée de x ; et qu'on développe ensuite suivant les puissances et les produits de ω, ω', ω'' etc,

La fonction u deviendra

$$u + \overset{1}{u} + \overset{2}{u} + \overset{3}{u} + \text{etc},$$

et la fonction V deviendra pareillement

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \text{etc},$$

où je dénote, comme je l'ai fait plus haut, par $\overset{1}{u}$ et $\overset{1}{V}$ la totalité des termes du développement de u et V, dans lequels ω, ω' etc, ne sont qu'à la première dimension, par $\overset{2}{u}$, $\overset{2}{V}$ la totalité des termes de ces développemens, dans lesquels ω, ω' etc, forment deux dimensions, et ainsi de suite.

Donc si au lieu de substituer $y + \omega$, $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$ etc, à la place de y, y', y'' etc, on y substituoit $y + m\omega$, $y' + m\omega'$, $y'' + m\omega''$ etc, m étant une constante quelconque, les fonctions u et V deviendroient

$$u + \overset{1}{m u} + \overset{2}{m^2 u} + \overset{3}{m^3 u} + \text{etc},$$

$$V + m \overset{1}{V} + m^2 \overset{2}{V} + m^3 \overset{3}{V} + \text{etc},$$

Et l'équation $V = o$ donneroit cette transformée

$$V + m \overset{1}{V} + m^2 \overset{2}{V} + m^3 \overset{3}{V} + \text{etc}, = o.$$

laquelle à cause de $V = o$, se réduiroit en divisant par m, à

$$\overset{1}{V} + m \overset{2}{V} + m^2 \overset{3}{V} + \text{etc}, = o,$$

et comme m est une constante arbitraire qui peut avoir une valeur quelconque, il s'ensuit qu'on auroit separement l'équation $\overset{1}{V} = o$.

Supposons maintenant par exemple

$$V = f(u, u', x, y, y', y'')$$

il est clair que la fonction u ne pourra contenir que x, y, et y'; car si elle contenait y'', u' contiendrait y''', ainsi l'équation $V = o$, devrait contenir y'''; par conséquent V devrait contenir y''' contre l'hypothèse.

Maintenant puisque $\overset{1}{V}$ et $\overset{1}{u}$ sont les parties du développement de V et de u qui contient les premières dimensions de ω, ω', ω'', il est facile de voir qu'on aura

$$\overset{1}{V} = \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'')$$

$$+ \overset{1}{u} f'(u) + \overset{1}{u'} f'(u'),$$

D'un autre côté, il est visible que u ne peut être que de la forme

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\omega'$$

N et P étant des fonctions de x, y, y', sans ω.

De là on aura.

$$\overset{1}{u'} = N'\omega + (N + P')\omega' + P\omega''$$

Substituant ces valeur dans l'équation $\overset{1}{V} = 0$ et ordonnant les termes suivant ω, ω' etc, on aura

$$\omega \left(f'(y) + N f'(u) + N' f'(u') \right)$$

$$+ \omega' \left(f'(y') + P f'(u) + (N + P') f'(u') \right)$$

$$+ \omega'' \left(f'(y'') + P f'(u') \right) = 0$$

La fonction ω devant demeurer indéterminée, faudra que les coéficiens de ω, ω', ω'' soient nu chacun en particulier, ce qui donnera ces trc équations

$$f'(y) + N f'(u) + N' f'(u') = 0$$

$$f'(y') + P f'(u) + (N + P') f'(u') = 0$$

$$f'(y'') + P f'(u') = 0$$

D'où par l'élimination des deux quantités N et P, on tirera une équation qui sera l'équation de condition cherchée.

En effet la dernière équation donne

$$P = -\frac{f'(y'')}{f'(u')}$$

Ensuite la seconde donne

$$N = -' - \frac{f'(y') + P f'(u)}{f'(u')};$$

Et substituant ces valeurs dans la première,

$$f'(y) + N f'(u) + N' f'(u') = o$$

on aura l'équation de condition nécessaire, pour que la quantité u puisse être une simple fonction de x, y, y' indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y. On voit que la méthode est générale, quelles que soient les fonctions dérivées de y et u, qui puissent entrer dans l'équation $V = o$.

Si cette équation ne contenait de dérivées que y' et u', on aurait alors $f'(y'') = o$; donc $P = o$; donc

$$N = -\frac{f'(y')}{f'(u')}$$

et l'équation de condition serait

$$f'(y) - \frac{f'(y')}{f'(u')} \times f'(u) - \left(\frac{f'(y')}{f'(u')}\right)' \times f'(u') = o.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que l'équation $V = o$, soit réduite à cette forme

$$u' + y' \varphi (u, x, y) + \psi (u, x, y) = o$$

En sorte que l'on ait

$$f (x, u', x\ y, y') = u' + y' \varphi (u, x, y) + \psi (u, x, y),$$

en prenant les fonctions dérivées relativement aux quantités y, y', u, u' on aura

$$f' (y) = y' \varphi' (y) + \psi' (y)$$

$$f' (y') = \varphi (u, x, y)$$

$$f' (u) = y' \varphi' (u) + \psi' (u)$$

$$f' (u') = 1.$$

Ainsi l'équation de condition, pour que la quantité u déterminée par cette équation, puisse être une fonction de x, y, sera

$$y' \varphi' (y) + \psi' (y) - \left(y' \varphi' (u) + \psi' (u) \right) \times \varphi (u, x, y) - \varphi' (u, x, y) = o$$

Or $\varphi' (u, x, y) = u' \varphi' (u) + \varphi' (x) + y' \varphi' (y)$

Donc faisant cette substitution, on aura

$$\psi' (y) - u' \varphi' (u) - \varphi' (x) - \left(y' \varphi' (u) + \psi' (u) \right) \times \varphi (u, x, y) = o$$

Mais l'équation proposée donne

$$u' = -y'\varphi(u, x, y) - \psi(u, x, y)$$

si on substitue cette valeur, les termes affectés de y' se détruisent, et l'on aura l'équation

$$\psi(y) - \varphi'(x) + \varphi'(u) \times \psi(u, x, y) - \psi'(u) \times \varphi(u, x, y) = 0.$$

C'est l'équation de condition connue pour que l'équation dérivée à trois variables.

$$u' + y'\varphi(u, x, y) + \psi(u, x, y) = 0$$

admette une équation primitive entre u, x et y, et il est évident en effet que le problême général que nous avons résolu revient dans ce cas à ce que cette équation ait une équation primitive indépendamment d'aucune relation entre x et y.

On peut au reste déduire la solution de ce dernier problême de la considération de l'équation

$$\psi(u, x, y) + y'\varphi(u, x, y) = -u'$$

en y regardant u comme une fonction de x et y; car en supposant $u = F(x, y)$, on aura $u' = F(x, y)$ et il faudra que la quantité

$$\psi(u, x, y) + y'\varphi(u, x, y)$$

soit une fonction dérivée exacte ; par conséquent par l'équation de condition trouvée plus haut, la fonction dérivée de $\psi(u, x, y)$ relativement à y devra être égale ou plutôt identique avec la fonction dérivée de

$$\varphi(u, x, y)$$

rélativement à x. Or puisque u est une fonction de x et y, dont les fonctions dérivées relatives à x et y

sont représentées par $F(x)$ et $F'(y)$, il est facile de voir que la fonction dérivée de $\downarrow(u, x, y)$ relativement à y sera

$$\downarrow'(y) + \Psi'(u) \times F(y'),$$

et que la fonction dérivée de $\varphi(u, x, y)$ relativement à x sera $\varphi'(x) + \varphi'(u) \times F'(x)$. Ainsi on aura l'équation de condition

$$\downarrow'(y) - \varphi'(x) + \Psi'(u) \times F'(y) - \varphi'(u) \times F'(x) = 0$$

Mais puisque $u = F(x, y)$ on a

$$u' = F'(x, y) = F'(x) + y' F'(y);$$

donc

$$F'(x) = -\downarrow(u, x, y) \text{ et } F'(y) = -\varphi(u, x, y);$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a la même équation de condition trouvée par la première méthode.

Après avoir donné les conditions nécessaires pour qu'une fonction ou équation, dérivée d'un ordre quelconque, ait une fonction ou équation primitive, il conviendrait d'exposer les méthodes particulières par lesquelles on peut, dans différens cas, préparer ou transformer une équation dérivée, de manière qu'elle devienne susceptible d'une équation primitive.

Mais il serait trop long d'entrer dans le détail de ces méthodes; on peut les voir dans les traités connus

nus sur le calcul intégral, et nous en avons indiqué les principales dans la *théorie des fonctions.* (n°. 64, etc).

Il y a cependant une espèce d'équations primitives qui semblent échapper à la théorie générale, et qui méritent une considération particulière, tant par elles-mêmes que par l'analise dont elles dépendent. Nous allons en faire l'objet de la leçon suivante.

LEÇON QUINZIÈME.

Des valeurs singulières qui satisfont aux équations dérivées, et qui ne sont pas comprises dans les équations primitives. Théorie des équations primitives singulières.

La théorie des équations dérivées, exposée dans la leçon XII, porte naturellement à conclure que toute valeur qui peut satisfaire à une équation dérivée donnée doit être renfermée dansson équation primitive, pourvu que celle-ci ait toute la généralité dont elle est susceptible, par les constantes arbitraires qui doivent y entrer. Il y a néanmoins des équations dérivées auxquelles satisfont des valeurs que j'appelle *singulières*, parce qu'elles ne sont pas comprises dans leurs équations primitives. Ces sortes de valeurs se sont présentées aux géomètres, presque dès la naissance du calcul différentiel ; mais comme la théorie des constantes arbitraires n'étoit gueres connue alors, on n'a pas d'abord regardé ces valeurs comme formant une exception aux règles générales du calcul differentiel. Euler est le premier qui les ait envisagées sous ce point de vue et qui ait donné des règles pour les distinguer des intégrales ordinaires.

Depuis on a reconnu qu'elles dépendent de la théorie générale des équations différentielles ou dérivées, et qu'elles servent à la completter ; c'est ce que nous allons développer avec toute l'étendue qu'exige l'im portance de la matière.

Considérons une équation quelconque du premier ordre, représentée par

$$f(x, y, y') = 0,$$

et supposons qu'elle soit dérivée de l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Suivant la théorie générale cette équation

$$F(x, y, a) = 0$$

donnera l'équation dérivée

$$F'(x, y, a) = 0$$

savoir

$$F'(x) + y' F'(y) = 0,$$

conformément à la notation que nous avons employée jusqu'ici ; et ces deux équations étant combinées ensemble de manière que la constante a disparaisse, produiront l'équation

$$f(x, y, y') = 0.$$

Maintenant il est clair que le résultat de l'élimination de a sera le même, quelle que soit la quantité a, soit constante ou variable, pourvu que les deux équations

$$F(x, y, a) = 0$$

et

$$F'(x) + y' F'(y) = 0$$

soient les mêmes. Donc aussi la même équation

$$f(x, y, y') = 0$$

pourra résulter de l'équation

$$F(x, y, a) = 0$$

en supposant a variable et fonction de x pourvu que l'équation dérivée $F'(x, y, a) = 0$ soit également $F'(x) + y' F'(y) = 0$.

Mais en regardant a comme une fonction de x, on a

$$F'(x, y, a) = F'(x) + y' F'(y) + a' F'(a);$$

ainsi la condition dont il s'agit aura lieu si le terme $a' F'(a)$ disparaît; d'où il s'ensuit que la valeur de y tirée de l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0$$

satisfera également à l'équation du premier ordre

$$f(x, y, y') = 0$$

en prenant pour a une fonction de x déterminée par l'équation

$$a' F'(a) = 0.$$

Cette équation donne ou $a' = 0$, ou $F'(a) = 0$. L'équation $a' = 0$ donne a égal à une constante quelconque, c'est le cas de l'équation primitive ordinaire, dans lequel a est la constante arbitraire.

Mais l'autre équation

$$F'(a) = 0,$$

dans laquelle $F'(a)$ est une fonction de x, y, et a, donnera par la résolution, la valeur de a en x, et y; et cette valeur étant substituée dans l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

on aura une nouvelle équation en x et y sans

constante arbitraire, qui conduira également à la même équation dérivée, et qui sera nécessairement différente de l'équation primitive ordinaire, puisque dans celle ci la quantité a est une constante arbitraire, et que dans l'autre elle devient une fonction de x et y.

Donc, en général, si on élimine a des deux équations

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(a) = 0,$$

on aura l'équation qui renfermera les valeurs singulières de y, qui peuvent satisfaire à l'équation dérivée

$$f(x, y, y') = 0,$$

dont

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive ordinaire.

Nous appellerons cette équation, équation primitive *singulière*, pour la distinguer de l'équation primitive ordinaire, que nous appellerons aussi équation primitive complette.

Il faut seulement remarquer que comme l'essence de cette équation consiste en ce que la valeur de a est une fonction variable, si l'équation

$$F'(a) = 0,$$

par laquelle on doit déterminer a, donnait pour a une quantité constante, ou une telle fonction de x et y, qui devînt égale à une constante, en vertu de l'équation $F(x, y, a) = 0$, dans laquelle on doit

substituer cette valeur de a, alors cette équation cesserait d'être une équation primitive singulière, et ne serait plus qu'un cas particulier de l'équation primitive ordinaire.

Nous avons trouvé (leçon XII), que l'équation du premier ordre

$$y' \sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y\,y' - x = 0$$

a pour équation primitive

$$x^2 - 2\,a\,y - a^2 - b = 0,$$

où a est la constante arbitraire. Faisant donc

$$F(x, y, a) = x^2 - 2\,a\,y - a^2 - b,$$

et prenant les fonctions dérivées de tous les termes relativement à a seul, on aura

$$F'(a) = -2\,y - 2\,a;$$

donc l'équation $F'(a) = 0$, donnera $a = -y$, valeur qui étant substituée dans l'équation primitive, donne

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

équation qui satisfait également à l'équation du premier ordre.

En effet, cette équation donne

$$y^2 = b - x^2, \text{ et } y, y' = -x;$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$y' \sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y\,y' - x = 0$$

la rendent identique.

Comme on sait par la théorie des équations, que l'équation dérivée

$$F'(a) = 0,$$

relative à a, contient la condition qui rend égales deux des racines de l'équation

$$F(x, y, a) = 0$$

ordonnée par rapport à a, il s'en suit que la valeur singulière de y, dans cette équation, a la propriété de donner à l'équation en a, une racine double.

On voit en effet que l'équation

$$a^2 + 2ay - x^2 + b = 0$$

acquiert une racine double en faisant

$$y^2 = b - x^2.$$

Si l'équation primitive était

$$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

L'équation dérivée relative à a, serait

$$-y(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)a = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b},$$

valeur qui étant substituée dans la proposée, donne

$$\frac{y^4(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b} = 0$$

par conséquent

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

pour l'équation primitive singulière.

Mais comme cette équation rend la valeur même de a nulle, il s'ensuit qu'elle ne sera qu'un cas particulier de l'équation primitive : en effet elle résulte de celle-ci en y faisant $a = 0$.

Si l'on tire la valeur de a de l'équation proposée, on a

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{y} \pm \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

d'où l'on voit que l'équation

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

rend les deux racines de a égales ; ainsi on ne peut pas dire que toute valeur de y, qui donnera des racines égales à l'équation en a, sera une valeur singulière.

On peut appliquer aux équations des ordres supérieurs au premier la théorie que nous venons de donner, sur les équations dérivées de cet ordre.

En effet si

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}), a = 0$$

est l'équation primitive de l'équation dérivée de l'ordre n,

$$F(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}) = 0,$$

a étant la constante arbitraire ; celle-ci doit résulter de

le l'élimination de a entre l'équation primitive, et, on équation dérivée ; et il est évident que le résultat de cette élimination sera le même, soit que la quantité a soit constante ou variable pourvu que les deux equations soient de la même forme.

Or l'équation primitive

$$F(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0$$

est la même dans l'un et dans l'autre cas. Son équation dérivée, est dans le cas de a constante

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

et dans le cas où a seroit une fonction quelconque de x elle sera

$$F'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) + a' F'(a) = 0$$

donc les deux équations deviendront identiques si on détermine a de manière que le terme $a' F'(a)$ disparaisse.

Faisant donc

$$a' F'(a) = 0 \qquad \text{on a} \qquad \text{où } a' = 0,$$

et par conséquent a égal à une constante, ce qui est le cas ordinaire ; ou

$$F'(a) = 0,$$

ce qui donnera une valeur de a en x et y, laquelle étant substituée dans l'équation primitive

$$F(a, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a) = 0,$$

donnera une équation du même ordre qui satisfera également à la dérivée

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Elle pourra donc être regardée aussi comme une équation primitive de celle-ci, mais ce sera une équation primitive singulière sans constante arbitraire.

L'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$$

a pour équation primitive du premier ordre

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0$$

comme on peut s'en assurer en éliminant a au moyen de son équation dérivée

$$x - ay'' = 0;$$

si on prend l'équation dérivée relativement à a on a

$$-y' + a = 0;$$

d'où l'on tire $a = y'$, valeur qui étant substituée dans la même équation donne celle-ci

$$x^2 - y'^2 = 0,$$

d'où

$$y' = \pm x.$$

Cette valeur de y' satisfait aussi à l'équation proposée ; mais c'est une valeur singulière puisqu'elle n'est pas parvenue dans l'équation primitive.

on cherche l'équation primitive de l'équation du ier ordre

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0$$

facile de trouver celle-ci

$$\frac{x^3}{3} - 2ay + a^2x + b = 0,$$

est la nouvelle constante arbitraire.

maintenant on élimine a de ces deux équations, ıra celle-ci

$$(y - xy')^2 - 4\left(b - \frac{2x^3}{3}\right)(y - xy')y' + \left(b - \frac{2x^3}{3}\right)^2 = 0$$

era par conséquent l'autre équation primitive remier ordre de la proposée.

ı peut donc aussi chercher une équation primi- ingulière, d'après cette équation-ci, en prenant quation dérivée, relativement à b, et l'on trou-

$$4(y - xy')y' + 2\left(b - \frac{2x^3}{3}\right) = 0,$$

l'on tire

$$b = \frac{2x^3}{3} + 2(y - xy')y'$$

ıbstituant cette valeur dans l'équation précé-

dente, elle devient

$$4\,(y - xy')^2\,(x^2 - y'^2) = 0$$

Cette équation donne ces deux-ci

$$y - xy' = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - y'^2 = 0.$$

La première ne satisfait pas à la proposée; car elle donne $y' = \frac{y}{x}$

et de là

$$y'' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0.$$

La seconde donne $y' = \pm x$, c'est la même que nous avons trouvée ci-dessus.

Ainsi les deux équations primitives du premier ordre, ne donnent que la même equation singulière.

Il serait cependant naturel de penser que des équations primitives différentes, pourraient donner aussi différentes valeurs singulières; mais nous allons démontrer *a priori* que l'on a toujours la même équation primitive singulière, de quelque équation primitive qu'on la déduise; ce qu'on ne savait pas jusqu'ici.

Considérons une équation du second ordre représentée en général par

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

et dont l'équation primitive entre x et y, soit

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

a et b, étant les deux constantes arbitraires.

Par la théorie générale, on aura ses deux équations primitives du premier ordre, en éliminant a ou b, par le moyen de cette même équation et de sa première équation dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

a et b étant ici regardées comme constantes.

Comme la fonction dérivée $F'(x, y)$ renferme, outre les constantes a et b, la fonction y', désignons-là par

$$\varphi(x, y, y', a, b).$$

Ainsi on aura les deux équations primitives du premier ordre, en substituant successivement, dans la même équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

la valeur de b en x, y, a, et la valeur de a en x, y et b, tirées de la même équation

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

Ensuite on aura les équations primitives singulières, en éliminant a de la première, par le moyen de son équation dérivée, prise relativement à a, et en éliminant b de la seconde, par le moyen de son équation dérivée prise relativement à b.

Considérons d'abord, dans l'équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

en supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b) = F'(x, y)$$

On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs et en tirer des conclusions semblables. Ainsi si

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

est supposée être l'équation primitive en x et y et les trois constantes arbitraires a, b, c, d'une équation dérivée du troisième ordre, les trois équations primitives du second ordre donneront une même équation primitive singulière de ce même ordre qui ne sera que le résultat de l'élimination de a, b, c et de b', c', au moyen de ces six équations.

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = 0$$

$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = 0$$

$$F'(a) + b' F'(b) + c' F'(c) = 0$$

$$\varphi'(a) + b' \varphi'(b) + c' \varphi'(c) = 0$$

$$\psi'(a) + b' \psi'(b) + c' \psi'(c) = 0$$

En supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = F'(x, y)$$

$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = F''(x, y).$$

Et ainsi de suite.

Ainsi

Ainsi l'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2\,y'\,y''}{x} + 1 = 0$$

ayant comme on la vu ci-dessus, pour équation primitive entre x et y, l'équation

$$\frac{x^3}{3} - 2\,a\,y + a^2\,x + b = 0,$$

où a et b sont les constantes arbitraires ; on aura tout de suite l'équation primitive singulière du premier ordre, en combinant cette équation avec son équation dérivée ordinaire, et avec les deux dérivées de celles-ci prises, par rapport à a, et en regardant b comme fonction de x, y, y' et a, de manière que les quantités a, b, et b' disparaissent.

Pour donner plus de généralité à cet exemple, en conservant la constante b dans l'équation dérivée, je donnerai d'abord à l'équation primitive la forme

$$x^2 + 3\,a^2 + \frac{3\,b - 6\,a\,y}{x} = 0$$

Et j'aurai pour sa dérivée

$$2\,x - \frac{6\,a\,y'}{x} - \frac{3\,b - 6\,a\,y}{x^2} = 0.$$

Prenant maintenant les dérivées de l'une et de l'autre relativement à a, il viendra

-ci

$$^2)\,x^2-(1-2a)\,x\,y'-a^2-y'^2=0$$

$$\frac{-y')\,x}{2}-\frac{(b-y')^2}{x^2}-b^2=0$$

'équation dérivée de la première rela-
on a

$$\left(\frac{1}{2}-2a\right)x+2x\,y'-2a=0$$

$$a=\frac{x^2+4x\,y'}{4(1+x^2)}$$

int substituée dans la même équation,

$$-y'^2+\frac{(4x\,y'+x^2)^2}{16(1+x^2)}=0,$$

équation dérivée de la seconde relati-
ra

$$+\frac{2(b-y')}{x^2}+2b=0$$

$$b=\frac{x^2(4y'-x^2)}{4(1+x^2)}$$

on de cette valeur donnera

$$6a - \frac{6y}{x} + \frac{3b'}{x} = 0$$

$$\frac{6y}{x^2} - \frac{6y'}{x} - \frac{3b'}{x} = 0.$$

b étant supposé fonction de a.

En éliminant d'abord b' on a

$\frac{6(a-y')}{x} = 0$, ce qui donne $a = y'$: les deux premières donnent en suite, en éliminant b ;

$$3x + \frac{3a^2 - 6ay'}{x} = 0;$$

substituant la valeur de a il vient

$$3x - \frac{3y'^2}{x} = 0, \quad \text{ou} \quad y'^2 - x^2 = 0$$

comme plus haut.

Soit encore l'équation du second ord

$$y - xy' + \frac{x^2}{a} y'' - t$$

dont l'équat

$$y -$$

Si on

au moy

en a ces deux-ci

$$y+\left(\frac{a}{2}-a^2\right)x^2-(1-2a)\,xy'-a^2-y'^2=0$$

$$y-\frac{(b+y')\,x}{2}-\frac{(b-y')^2}{x^2}-b^2=0$$

En prenant l'équation dérivée de la première relativement à a, on a

$$\left(\frac{1}{2}-2a\right)x+2xy'-2a=0$$

d'où résulte

$$a=\frac{x^2+4xy'}{4(1+x^2)}$$

valeur qui, étant substituée dans la même équation, donne

$$-y'^2+\frac{(4xy'+x^2)^2}{16(1+x^2)}=0,$$

équation dérivée de la seconde relati-
ra

$$\frac{(b-y')}{x^2}+2b=0$$

$$\frac{x^2(4y'-x^2)}{4(1+x^2)}$$

tte valeur donnera

$$y - \frac{x y'}{2} - \frac{y'^2}{x^2} + \frac{(4y' - x^3)^2}{16 x^2 (1 + x^2)} = 0$$

ces deux équations reviennent au même, car elles se réduisent l'une et l'autre à celle ci

$$(1+x^2)y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)y' - y'^2 + \frac{x^4}{16} = 0$$

qui est par conséquent l'équation primitive singulière de la proposée du second ordre.

On aura le même résultat en éliminant immédiatement a, b et b', au moyen de l'équation primitive

$$y - \frac{a}{2} x^2 - b x - a^2 - b^2 = 0,$$

de sa première dérivée

$$y' - a x - b = 0,$$

et des deux dérivées de celles-ci, par rapport à a

$$\frac{x^2}{2} - 2a + (x - 2b) b' = 0, \quad x + b' =$$

Ces deux-ci donnent en éliminant b'

$$\frac{x^2}{2} - a - (x - 2b) x = 0$$

En combinant celle-ci avec la seconde, on trouve

$$a = \frac{x^2 + 4 x y'}{4 (1 + x^2)}, \quad b = \frac{4y' - x^3}{4 (1 + x^2)},$$

et ces valeurs étant substituées dans la première, il vient

$$y(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(\frac{x^3}{2}+x\right)y'-y'^2=0$$

comme ci-dessus.

Si de l'équation primitive

$$F\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a\right)=0$$

on tire la valeur de a en fonction de

$$x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$$

et qu'on la désigne par

$$\Phi\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$$

il est clair qu'en substituant cette fonction à la place de a, dans la même équation, elle deviendra nécessairement identique; par conséquent ses équations dérivées, relatives à

$$x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$$

en particulier, auront lieu aussi.

On aura donc

$$F'(x)+F'(a)\times\Phi'(x)=0$$

$$F'(y)+F'(a)\times\Phi'(y)=0$$

$$F'(y')+F'(a)\times\Phi'(y')=0$$

Etc.

où j'ai conservé sous le signe F' la lettre a, à la place de sa valeur

$$\Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}).$$

De là on aura

$$\Phi'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(a)}$$

$$\Phi'(y) = -\frac{F'(y)}{F'(a)}$$

$$\Phi'(y') = -\frac{F'(y')}{F'(a)}$$

Etc.

Donc, puisque la quantité $F'(a)$ devient nulle dans le cas de l'équation primitive singulière, il s'ensuit que dans ce même cas les valeurs de

$\Phi'(x), \Phi'(y'), \Phi'(y')$ etc. jusqu'à $\Phi'(y^{(n-1)})$ deviendront chacune infinie.

Ce caractère fournit aussi un moyen général de trouver l'équation primitive singulière ; et ce moyen est sur-tout utile lorsque l'équation primitive est sous la forme.

$$\Phi(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}) = a,$$

laquelle paraît échapper à la règle générale établie ci-dessus ; car on aurait ici

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$

$$= \Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) - a.$$

et de là

$$F'(a) = -1;$$

d'où l'on ne pourrait rien conclure relativement à l'équation primitive singulière.

Il faut néanmoins observer que quoiqu'il soit vrai que l'équation primitive singulière rend

$$\Phi'(x), \quad \Phi'(y), \quad \Phi'(y') \text{ etc, infinis,}$$

on n'en doit pas conclure que toute équation qui rendra ces quantités infinies, sera une équation primitive singulière. Il faudra de plus que cette équation ne rende pas la fonction

$$\Phi(x, y, y' \ldots)$$

égale à une constante ; car elle ne serait alors qu'un cas particulier de l'équation primitive générale.

Par exemple si

$$\Phi(x, y) = (y-x)^m,$$

on aura

$$\Phi'(x) = -m(y-x)^{m-1}$$

$$\Phi'(y) = m(y-x)^{m-1}$$

l'une et l'autre de ces quantités devient infinies, en faisant $y - x = 0$, pourvu que $m < 1$.

Mais cette équation $y - x = 0$ rend la valeur de $\Phi(x, y)$ égale à zero ou à l'infini, suivant que m est positif ou négatif ; donc elle ne peut pas être une équation primitive singulière.

donnera une équation du même ordre qui satisfera également à la dérivée

$$f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0.$$

Elle pourra donc être regardée aussi comme une équation primitive de celle-ci, mais ce sera une équation primitive singulière sans constante arbitraire.

L'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$$

a pour équation primitive du premier ordre

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0$$

comme on peut s'en assurer en éliminant a au moyen de son équation dérivée

$$x - ay'' = 0;$$

si on prend l'équation dérivée relativement à a on a

$$-y' + a = 0;$$

d'où l'on tire $a = y'$, valeur qui étant substituée dans la même équation donne celle-ci

$$x^2 - y'^2 = 0,$$

d'où

$$y' = \pm x.$$

Cette valeur de y' satisfait aussi à l'équation proposée ; mais c'est une valeur singulière puisqu'elle n'est pas parvenue dans l'équation primitive.

Si on cherche l'équation primitive de l'équation du premier ordre

$$x^2 - 2ay' + a^2 = 0$$

il est facile de trouver celle-ci

$$\frac{x^3}{3} - 2ay + a^2x + b = 0,$$

où b est la nouvelle constante arbitraire.

Si maintenant on élimine a de ces deux équations, on aura celle-ci

$$4x^2(y - xy')^2 - 4\left(b - \frac{2x^3}{3}\right)(y - xy')y' + \left(b - \frac{2x^3}{3}\right)^2 = 0$$

qui sera par conséquent l'autre équation primitive du premier ordre de la proposée.

On peut donc aussi chercher une équation primitive singulière, d'après cette équation-ci, en prenant son équation dérivée, relativement à b, et l'on trouvera

$$-4(y - xy')y' + 2\left(b - \frac{2x^3}{3}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{2x^3}{3} + 2(y - xy')y'$$

Substituant cette valeur dans l'équation précé-

dente, elle devient

$$4\,(y - xy')^2\,(x^2 - y'^2) = 0$$

Cette équation donne ces deux-ci

$$y - xy' = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - y'^2 = 0.$$

La première ne satisfait pas à la proposée; car elle donne $y' = \frac{y}{x}$

et de là

$$y'' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0.$$

La seconde donne $y' = \pm x$, c'est la même que nous avons trouvée ci-dessus.

Ainsi les deux équations primitives du premier ordre, ne donnent que la même équation singulière.

Il serait cependant naturel de penser que des équations primitives différentes, pourraient donner aussi différentes valeurs singulières; mais nous allons démontrer *a priori* que l'on a toujours la même équation primitive singulière, de quelque équation primitive qu'on la déduise; ce qu'on ne savait pas jusqu'ici.

Considérons une équation du second ordre représentée en général par

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

et dont l'équation primitive entre x et y, soit

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

a et b, étant les deux constantes arbitraires.

Par la théorie générale, on aura ses deux équations primitives du premier ordre, en éliminant a ou b, par le moyen de cette même équation et de sa première équation dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

a et b étant ici regardées comme constantes.

Comme la fonction dérivée $F'(x, y)$ renferme, outre les constantes a et b, la fonction y', désignons-là par

$$\varphi(x, y, y', a, b).$$

Ainsi on aura les deux équations primitives du premier ordre, en substituant successivement, dans la même équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

la valeur de b en x, y, a, et la valeur de a en x, y et b, tirées de la même équation

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

Ensuite on aura les équations primitives singulières, en éliminant a de la première, par le moyen de son équation dérivée, prise relativement à a, et en éliminant b de la seconde, par le moyen de son équation dérivée prise relativement à b.

Considérons d'abord, dans l'équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

la quantité b, comme une fonction de x, y, a, déterminée par l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

Son équation dérivée prise relativement à a, sera

$$\varphi'(a) + b' \varphi'(b) = 0;$$

en supposant que b' soit la fonction dérivée de b prise relativement à a. Or, comme b est une fonction de a, déterminée par l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

on aura la valeur de b', en prenant la dérivée de cette équation, par rapport à a; on aura ainsi

$$F'(a) + b' F'(b) = 0$$

Si maintenant on élimine b' de ces deux équations, on a

$$\varphi'(a) \times F'(b) - \varphi'(b) \times F'(a) = 0.$$

Cette équation étant combinée avec les deux

$$F(x, y, a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

donnera par l'élimination de a et b l'équation singulière résultante de l'équation dérivée relative à -

En regardant de même a comme fonction de b dans l'équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

on aura également l'équation dérivée relative à b

$$a' \varphi'(a) + \varphi'(b) = 0$$

la valeur de a' dépendra alors de l'équation dérivée ativement à b

$$a' F'(a) + F'(b) = 0.$$

sorte que par l'élimination de a on aura pareille-:nt

$$\varphi'(a) \times F'(b) - \varphi'(b) \times F'(a) = 0.$$

Ainsi l'équation primitive singulière résultante de quation dérivée relative à b sera encore le resultat l'élimination de a et b par le moyen de l'équation écédente et des équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \varphi(x, y, y', a, b) = 0.$$

Donc ce resultat sera le même dans les deux cas isque les équations sont les mêmes.

Il s'ensuit de là qu'on peut trouver directement quation primitive singulière d'une équation du se-nd ordre, au moyen de son équation primitive mplette sans connaître en particulier les deux équa-n primitives du premier ordre, car soit

$$F(x, y, a, b) = 0$$

tte équation où a et b sont les deux constantes arbi-iires, il n'y aura qu'à éliminer a, b, et b', au moyen :s quatre équations

$$F(x, y, a, b) = 0$$

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0$$

$$F'(a) + b' F'(b) = 0$$

$$\varphi'(a) + b' \varphi'(b) = 0$$

en supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b) = F'(x, y)$$

On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs et en tirer des conclusions semblables. Ainsi si

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

est supposée être l'équation primitive en x et y et les trois constantes arbitraires a, b, c, d'une équation dérivée du troisième ordre, les trois équations primitives du second ordre donneront une même équation primitive singulière de ce même ordre qui ne sera que le résultat de l'élimination de a, b, c et de b', c', au moyen de ces six équations.

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = 0$$

$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = 0$$

$$F'(a) + b' F'(b) + c' F'(c) = 0$$

$$\varphi'(a) + b' \varphi'(b) + c' \varphi'(c) = 0$$

$$\psi'(a) + b' \psi'(b) + c' \psi'(c) = 0$$

En supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = F'(x, y)$$

$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = F''(x, y).$$

Et ainsi de suite.

Ainsi

Ainsi l'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2\,y'\,y''}{x} + 1 = 0$$

ayant comme on la vu ci-dessus, pour équation primitive entre x et y, l'équation

$$\frac{x^3}{3} - 2\,a\,y + a^2\,x + b = 0,$$

où a et b sont les constantes arbitraires ; on aura tout de suite l'équation primitive singulière du premier ordre, en combinant cette équation avec son équation dérivée ordinaire, et avec les deux dérivées de celles-ci prises, par rapport à a, et en regardant b comme fonction de x, y, y' et a, de manière que les quantités a, b, et b' disparaissent.

Pour donner plus de généralité à cet exemple, en conservant la constante b dans l'équation dérivée, je donnerai d'abord à l'équation primitive la forme

$$x^2 + 3\,a^2 + \frac{3\,b - 6\,a\,y}{x} = 0$$

Et j'aurai pour sa dérivée

$$2\,x - \frac{6\,a\,y'}{x} - \frac{3\,b - 6\,a\,y}{x^2} = 0.$$

Prenant maintenant les dérivées de l'une et de l'autre relativement à a, il viendra

$$6a - \frac{6y}{x} + \frac{3b'}{x} = 0$$

$$\frac{6y}{x^2} - \frac{6y'}{x} - \frac{3b'}{x} = 0.$$

b étant supposé fonction de a.

En éliminant d'abord b' on a

$\frac{6(a-y')}{x} = 0$, ce qui donne $a = y'$: les de premières donnent en suite, en éliminant b

$$3x + \frac{3a^2 - 6ay'}{x} = 0;$$

substituant la valeur de a il vient

$$3x - \frac{3y'^2}{x} = 0, \quad \text{ou} \quad y'^2 - x^2 = 0$$

comme plus haut.

Soit encore l'équation du second ordre

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}y'' - (y' - xy'')^2 y''^2 = x$$

dont l'équation primitive en x et y ; est

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0.$$

Si on élimine tour à tour a et b de cette équati au moyen de son équation dérivée

$$y' - ax - b = 0,$$

ou à ces deux-ci

$$y+\left(\frac{a}{2}-a^2\right)x^2-(1-2a)\,x\,y'-a^2-y'^2=0$$

$$y-\frac{(b+y')\,x}{2}-\frac{(b-y')^2}{x^2}-b^2=0$$

En prenant l'équation dérivée de la première relativement à a, on a

$$\left(\frac{1}{2}-2a\right)x+2x\,y'-2a=0$$

d'où résulte

$$a=\frac{x^2+4\,x\,y'}{4(1+x^2)}$$

valeur qui, étant substituée dans la même équation, donne

$$y-x\,y'-y'^2+\frac{(4\,x\,y'+x^2)^2}{16(1+x^2)}=0,$$

De même l'équation dérivée de la seconde relativement à b sera

$$-\frac{x}{2}+\frac{2(b-y')}{x^2}+2b=0$$

d'où l'on tire

$$b=\frac{x^2(4y'-x^3)}{4(1+x^2)}$$

et la substitution de cette valeur donnera

$$y - \frac{x y'}{2} - \frac{y'^2}{x^2} + \frac{(4y' - x^3)^2}{16 x^2 (1 + x^2)} = 0$$

ces deux équations reviennent au même, car elles se réduisent l'une et l'autre à celle ci

$$(1+x^2)y - (x + \frac{x^3}{2})y' - y'^2 + \frac{x^4}{16} = 0$$

qui est par conséquent l'équation primitive singulière de la proposée du second ordre.

On aura le même résultat en éliminant immédiatement a, b et b', au moyen de l'équation primitive

$$y - \frac{a}{2} x^2 - b x - a^2 - b^2 = 0,$$

de sa première dérivée

$$y' - a x - b = 0,$$

et des deux dérivées de celles-ci, par rapport à a

$$\frac{x^2}{2} - 2a + (x - 2b) b' = 0, \quad x + b' =$$

Ces deux-ci donnent en éliminant b'

$$\frac{x^2}{2} - a - (x - 2b) x = 0$$

En combinant celle-ci avec la seconde, on trouve

$$a = \frac{x^2 + 4 x y'}{4 (1 + x^2)}, \quad b = \frac{4y' - x^3}{4 (1 + x^2)},$$

et ces valeurs étant substituées dans la première, il vient

$$y(1+x^2)+\frac{x^4}{16}-\left(\frac{x^3}{2}+x\right)y'-y'^2=0$$

comme ci-dessus.

Si de l'équation primitive

$$F\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, a\right)=0$$

on tire la valeur de a en fonction de

$$x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$$

et qu'on la désigne par

$$\Phi\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$$

il est clair qu'en substituant cette fonction à la place de a, dans la même équation, elle deviendra nécessairement identique; par conséquent ses équations dérivées, relatives à

$$x, y, y' \ldots y^{(n-1)}$$

en particulier, auront lieu aussi.

On aura donc

$$F'(x)+F'(a)\times\Phi'(x)=0$$

$$F'(y)+F'(a)\times\Phi'(y)=0$$

$$F'(y')+F'(a)\times\Phi'(y')=0$$

Etc.

où j'ai conservé sous le signe F' la lettre a, à la place de sa valeur

$$\Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}).$$

De là on aura

$$\Phi'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(a)}$$

$$\Phi'(y) = -\frac{F'(y)}{F'(a)}$$

$$\Phi'(y') = -\frac{F'(y')}{F'(a)}$$

Etc.

Donc, puisque la quantité $F'(a)$ devient nulle dans le cas de l'équation primitive singulière, il s'ensuit que dans ce même cas les valeurs de

$\Phi'(x), \Phi'(y'), \Phi'(y')$ etc. jusqu'à $\Phi'(y^{(n-1)})$ deviendront chacune infinie.

Ce caractère fournit aussi un moyen général de trouver l'équation primitive singulière ; et ce moyen est sur-tout utile lorsque l'équation primitive est sous la forme.

$$\Phi(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}) = a,$$

laquelle paraît échapper à la règle générale établie ci-dessus ; car on aurait ici

$$F(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$$
$$= \Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) - a.$$

et de là

$$F'(a) = -1;$$

d'où l'on ne pourrait rien conclure relativement à l'équation primitive singulière.

Il faut néanmoins observer que quoiqu'il soit vrai que l'équation primitive singulière rend

$$\Phi'(x), \quad \Phi'(y), \quad \Phi'(y') \text{ etc, infinis,}$$

on n'en doit pas conclure que toute équation qui rendra ces quantités infinies, sera une équation primitive singulière. Il faudra de plus que cette équation ne rende pas la fonction

$$\Phi(x, y, y' \ldots)$$

égale à une constante ; car elle ne serait alors qu'un cas particulier de l'équation primitive générale.

Par exemple si

$$\Phi(x, y) = (y-x)^m,$$

on aura

$$\Phi'(x) = -m(y-x)^{m-1}$$

$$\Phi'(y) = m(y-x)^{m-1}$$

l'une et l'autre de ces quantités devient infinies, en faisant $y - x = 0$, pourvu que $m < 1$.

Mais cette équation $y - x = 0$ rend la valeur de $\Phi(x, y)$ égale à zero ou à l'infini, suivant que m est positif ou négatif ; donc elle ne peut pas être une équation primitive singulière.

Prenons l'équation du premier exemple

$$x^2 - 2ay + a^2 - b = 0$$

elle donne

$$a = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$$

donc

$$\Phi(x, y) = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$$

et de là

$$\Phi'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

$$\Phi'(y) = -1 + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

où l'on voit que ces deux fonctions deviennent infinies par l'équation primitive singulière

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

Nous avons trouvé plus haut cette équation du premier ordre

$$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right) y' - y'^2 = 0$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre

$$y - x y' + \frac{x^2}{2} y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0$$

en dégageant la fonction y' on a

$$y' + \frac{2x + x^3}{4} - \frac{\sqrt{(1+x^2)} \times \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}{4} = 0$$

et

divisant par

$$\frac{1}{8}\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}$$

on a

$$\frac{8y'+4x+2x^3}{\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}}=2\sqrt{(1+x^2)}$$

équation dont les deux membres sont des fonctions dérivées exactes.

En prenant leurs fonctions primitives, et ajoutant la constante arbitraire K, on aura l'équation primitive

$$\sqrt{(16y+4x^2+x^4)}=x\sqrt{(1+x^2)}$$
$$-l\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)+k$$

comme il est facile de s'en assurer en prenant les fonctions dérivées de ses deux membres.

Cette équation est, comme l'on voit, bien différente de l'équation primitive complette

$$y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0,$$

Mais elle satisfait également à l'équation proposée du second ordre, parce qu'elle satisfait en général à l'équation du premier ordre, qui satisfait à celle du second ordre, comme primitive singulière.

Mais cette équation du premier ordre peut avo

elle-même une primitive singulière qu'il est bon de chercher.

Comme la constante k est débarrasée des variables n et y, on a immédiatement

$$k = \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} - x\sqrt{(1 + x^2)} - l(\sqrt{(1 + x^2)} - x)$$

de sorte qu'en désignant cette fonction par $\Phi(x, y)$ et prenant les fonctions dérivées relatives à x ou y, on aura sur le champ

$$\Phi'(y) = \frac{4}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}};$$

donc supposant cette quantité infinie, on aura l'équation

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, qui est déjà elle-même, une primitive singulière de la proposée du second ordre.

Elle satisfait en effet, comme on peut s'en assurer, à l'équation du premier ordre, mais elle ne satisfait plus à celle du second ordre.

On aurait pu aussi déduire immédiatement cette même équation singulière de l'équation primitive entre x et y

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

en déterminant a et b par ses deux équations dérivées relatives à a et b.

On aurait ainsi

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2a = 0, x + 2b = 0$$

d'où l'on tire

$$a = -\frac{x^2}{4}, b = -\frac{x}{2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente elle deviendrait

$$y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0$$

Il n'est pas difficile en effet de démontrer par la théorie générale des équations primitives singulières que ces sortes d'équations primitives singulières doubles résultent de l'équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0$$

en éliminant les deux constantes a et b par les deux équations particulières

$$F'(a) = 0, \qquad \text{et} \qquad F'(b) = 0.$$

Et par-là il est aisé de voir la raison pourquoi elles ne satisfont pas en général à l'équation du second ordre dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

est l'équation primitive complette avec les deux constantes arbitraires a et b.

Car soit $f(x, y, y', y'') = 0$, cette équation second ordre : elle résulte, comme nous l'avons v de l'élimination de a et b regardées comme const tes, au moyen des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0,$$
$$F'(x, y) = 0, F''(x, y) = 0.$$

Mais lorsqu'on regarde a et b, comme des fo tions de x et y, l'équation dérivée de

$$F(x, y, a, b) = 0$$

n'est plus simplement

$$F'(x, y) = 0,$$

mais elle devient

$$F'(x, y) + a' F'(a) + b' F'(b) = 0.$$

laquelle se réduit cependant à

$$F'(x, y) = 0$$

en déterminant a et b par les deux conditions

$$F'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(b) = 0,$$

qui sont celles de l'équation primitive singul double.

Comme la fonction dérivée $F'(x, y)$, étant d loppée, renferme les variables x, y, y', et les c constantes a et b, désignons-la par

$$\varphi(x, y, y', a, b)$$

il est clair que la troisième équation

$$F''(x, y) = 0$$

où a et b sont regardées comme constantes deviendra

$$\varphi'(x, y, y') = 0;$$

mais, dans le cas où ces quantités sont variables, elle deviendra

$$\varphi'(x, y, y') + a'\varphi'(a) + b'\varphi'(= 0,$$

qui ne se réduit plus à

$$\varphi'(x, y, y') = 0,$$

parce que les deux fonctions

$$\varphi'(a) \quad \text{et} \quad \varphi'(b)$$

ne sont pas nulles.

Ainsi il est impossible que l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

dans laquelle a et b sont des fonctions de x et y déterminées par les conditions

$$F'(a) = 0, F'(b) = 0$$

satifasse généralement à l'équation du second ordre qui résulte de la même équation par l'élimination des quantités a et b, au moyen de ses deux dérivées, première et seconde, prises en regardant a et b comme constantes.

On peut étendre cette théorie aux équations primitives des équations des ordres supérieurs.

Ainsi, si l'on a l'équation primitive

$$F'(x, y, a, b, c) = 0$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires, et qu'on

détermine ces trois quantités par les trois cor
tions

$$F'(a) = 0 \,;\, F'(b) = 0 \,,\, F'(c) = 0$$

on aura une équation primitive singulière triple ,
sera par conséquent la primitive singulière d'une éc
tion du premier ordre , qui sera elle-même la pri
tive singulière d'une autre du second ordre , laqu
sera enfin la primitive singulière de l'équation
troisième ordre , dont la même équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

sera la primitive ordinaire complette , avec les t
constantes arbitraires a, b, c ; mais cette équa
primitive singulière triple ne satisfera ni à l'équa
du troisième ordre , ni même à sa primitive si
lière du second ordre.

Nous avons démontré plus haut que les fonct

$$\Phi'(x), \quad \Phi'(y), \quad \Phi'(y') \quad \text{etc}, \Phi'(y^{(n-}$$

ont des valeurs infinies dans le cas de l'équation
mitive singulière de la dérivée, dont

$$\Phi(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}) = a$$

est la primitive ordinaire , avec la constante a
traire a.

On peut conclure delà, tout de suite, que tout n
tiplicateur qui rendra une équation de l'ordre q
conque n telle que

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

une dérivée exacte d'une équation de l'ordre inférieur $n-1$ deviendra nécessairement infini en vertu de l'équation primitive singulière de la même équation.

Car soit M ce multiplicateur; on aura donc par l'hypothèse

$$M\left(y^{(n)} + f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)\right) = \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$$

et l'équation primitive sera

$$\Phi\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right) = a,$$

$$\text{Or } \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}\,\Phi'\left(y^{(n-1)}\right) + \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}\right);$$

Donc

$$M = \Phi'\left(y^{(n-1)}\right);$$

par conséquent la quantité M deviendra infinie par la substitution de la valeur de $y^{(n-1)}$ donnée par l'équation primitive singulière.

Cette conclusion suit aussi directement de la forme même des multiplicateurs que nous avons donnée dans la leçon XIII. En effet si l'équation est du premier ordre, comme

$$y' + f(x, y) = 0$$

elle n'aura qu'une équation primitive telle que

$$F(x, y, a) = 0,$$

et tous les multiplicateurs de cette équation sont nécessairement renfermés dans la formule

$$\frac{\Phi a \times F'(y)}{F'(a)}$$

φa étant une fonction quelconque de a, en supposant qu'on substitue pour a sa valeur tirée de la même équation

$$F(x, y, a) = 0;$$

donc, puisque l'équation primitive singulière rend la fonction $F'(a)$ infinie, tous les multiplicateurs deviendront aussi infinis.

Si l'équation dérivée est du second ordre, comme

$$y'' + f(x, y, y') = 0$$

elle peut avoir deux équations primitives différentes chacune du premier ordre, telles qu

$F(x, y, y', a) = 0$ et [illegible] $, b) =$

et la forme générale [illegible]

$$\frac{\Phi'(a) \times}{} \quad ;$$

$\Phi($ [illegible] que de a et b

c'e [illegible] es par les équa

ti [illegible]

cune des deux fonctions dérivées

$$F'(a), F'(b);$$

donc tous les multiplicateurs deviendront infinis dans le cas de cette équation; et ainsi de-suite.

Par exemple l'équation

$$y' - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y} = 0$$

qui est la même que celle qu'on a considérée ci-dessus, a pour l'un de ses multiplicateurs la quantité

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2-b)}-y}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}},$$

En supposant ce multiplicateur, infini on a

$$x^2+y^2-b=0$$

pour son équation primitive singulière, ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà trouvé.

On a donc ainsi un nouveau moyen de trouver les équations primitives singulières par les multiplicateurs.

Quoiqu'il soit prouvé que tout multiplicateur infini par l'équation primitive singulière, on peut dire réciproquement qne toute équation un multiplicateur infini, sera une singulière. En effet, la formule générale

des multiplicateurs étant pour le premier ordre

$$\frac{\Phi\, a \times F'(y)}{F'(a)}$$

il est évident que sa valeur peut devenir infinie, sans que l'on ait $F'(a) = 0$; car pour cela il suffit que l'une ou l'autre des fonctions $\Phi\, a$, $F'(y)$, reçoive une valeur infinie.

Au reste, on peut se convaincre aussi par ce raisonnement fort simple, que l'équation primitive singulière doit rendre infini tout multiplicateur d'une équation d'un ordre quelconque n de la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0.$$

Car M étant un multiplicateur de cette équation, on aura

$$M\,(y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) =$$

$$\Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

et l'équation deviendra

$$\Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

dont l'équation primitive sera

$$\Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = a,$$

a étant une constante arbitraire.

Maintenant l'équation primitive singulière doit

satisfaire à la proposée

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = 0$$

et ne doit pas être comprise dans sa primitive complette

$$\Phi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = a.$$

Donc la valeur de $y^{(n-1)}$, tirée de la primitive singulière, étant substituée dans la fonction

$$\Phi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}),$$

ne doit pas la rendre égale à une constante, par conséquent elle ne devra pas rendre nulle sa dérivée

$$\varphi'(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

Donc cette valeur doit rendre nulle la quantité

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

et ne doit pas rendre nulle la quantité

$$M(y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)});$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle rendra la quantité M infinie.

C'est à-peu-près de cette manière que Laplace a

démontré le premier cette proposition importante, que d'autres géomètres avaient entrevue, mais dont on n'avait pas encore donné une démonstration rigoureuse. Voyez son mémoire sur les solutions particulières parmi ceux de l'académie des sciences de 1772.

LEÇON SEIZIÈME.

Comment l'équation primitive singulière resulte de l'équation dérivée.

Par les principes que nous venons d'établir on peut trouver l'équation primitive singulière de toute équation dérivée dont on connait déjà l'équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, ou dont on est en état de trouver cette équation à l'aide d'un multiplicateur.

Nous allons voir maintenant comment on peut déduire l'équation primitive singulière de l'équation dérivée seule.

Pour cela il faut examiner ce que l'équation dérivée devient dans le cas de l'équation primitive singulière.

Reprenons le principe fondamental des équations primitives singulières.

Si $F(x, y, a) = 0$ est l'équation primitive d'une équation du premier ordre, celle-ci sera le résultat de l'élimination de la constante a au moyen de son équation dérivée

$$F'(x, y) = 0;$$

relative à x et y ; et l'équation primitive singulière sera le résultat de l'élimination de la même quan-

Prenons l'équation du premier exemple

$$x^2 - 2ay + a^2 - b = 0$$

elle donne

$$a = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$$

donc

$$\Phi(x, y) = -y + \sqrt{(x^2 + y^2 - b)}$$

et de là

$$\Phi'(x) = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

$$\Phi'(y) = -1 + \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)}}$$

où l'on voit que ces deux fonctions deviennent infinies par l'équation primitive singulière

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

Nous avons trouvé plus haut cette équation du premier ordre

$$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - (\frac{x^3}{2} + x)y' - y'^2 = 0$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre

$$y - xy' + \frac{x^2}{8}y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0$$

en dégageant la fonction y' on a

$$y' + \frac{2x + x^3}{4} - \frac{\sqrt{(1+x^2)} \times \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}}{4} = 0$$

et

et divisant par

$$\frac{1}{8}\sqrt{(16\,y+4\,x^2+x^4)}$$

on a

$$\frac{8\,y'+4\,x+2\,x^3}{\sqrt{(16\,y+4\,x^2+x^4)}}=2\sqrt{(1+x^2)}$$

équation dont les deux membres sont des fonctions dérivées exactes.

En prenant leurs fonctions primitives, et ajoutant la constante arbitraire K, on aura l'équation primitive

$$\sqrt{(16\,y+4\,x^2+x^4)}=x\sqrt{(1+x^2)}$$

$$-l\left(\sqrt{(1+x^2)}-x\right)+k$$

comme il est facile de s'en assurer en prenant les fonctions dérivées de ses deux membres.

Cette équation est, comme l'on voit, bien différente de l'équation primitive complette

$$y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0,$$

Mais elle satisfait également à l'équation proposée du second ordre, parce qu'elle satisfait en général à l'équation du premier ordre, qui satisfait à celle du second ordre, comme primitive singulière.

Mais cette équation du premier ordre peut avoir

elle-même une primitive singulière qu'il est bon de chercher.

Comme la constante k est débarrasée des variables n et y, on a immédiatement

$$k = \sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)} - x\sqrt{(1 + x^2)} - l(\sqrt{(1 + x^2)} - x)$$

de sorte qu'en désignant cette fonction par $\Phi(x, y)$ et prenant les fonctions dérivées relatives à x ou y, on aura sur le champ

$$\Phi'(y) = \frac{4}{\sqrt{(16y + 4x^2 + x^4)}};$$

donc supposant cette quantité infinie, on aura l'équation

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, qui est déjà elle-même, une primitive singulière de la proposée du second ordre.

Elle satisfait en effet, comme on peut s'en assurer, à l'équation du premier ordre, mais elle ne satisfait plus à celle du second ordre.

On aurait pu aussi déduire immédiatement cette même équation singulière de l'équation primitive entre x et y

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$$

en déterminant a et b par ses deux équations dérivées relatives à a et b.

On aurait ainsi

$$\frac{1}{2}x^2 + 2a = 0, x + 2b = 0$$

d'où l'on tire

$$a = -\frac{x^2}{4}, b = -\frac{x}{2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente elle deviendrait

$$y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0$$

Il n'est pas difficile en effet de démontrer par la théorie générale des équations primitives singulières que ces sortes d'équations primitives singulières doubles résultent de l'équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0$$

en éliminant les deux constantes a et b par les deux équations particulières

$$F'(a) = 0, \qquad \text{et} \qquad F'(b) = 0.$$

Et par-là il est aisé de voir la raison pourquoi elles ne satisfont pas en général à l'équation du second ordre dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

est l'équation primitive complette avec les deux constantes arbitraires a et b.

Car soit $f(x, y, y', y'') = 0$, cette équation du second ordre : elle résulte, comme nous l'avons vu, de l'élimination de a et b regardées comme constantes, au moyen des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0,$$
$$F'(x, y) = 0, F''(x, y) = 0.$$

Mais lorsqu'on regarde a et b, comme des fonctions de x et y, l'équation dérivée de

$$F(x, y, a, b) = 0$$

n'est plus simplement

$$F'(x, y) = 0,$$

mais elle devient

$$F'(x, y) + a' F'(a) + b' F'(b) = 0.$$

laquelle se réduit cependant à

$$F'(x, y) = 0$$

en déterminant a et b par les deux conditions

$$F'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F'(b) = 0,$$

qui sont celles de l'équation primitive singulière double.

Comme la fonction dérivée $F'(x, y)$, étant développée, renferme les variables x, y, y', et les deux constantes a et b, désignons-la par

$$\varphi(x, y, y', a, b)$$

il est clair que la troisième équation

$$F''(x, y) = 0$$

où a et b sont regardées comme constantes deviendra

$$\varphi'(x, y, y') = 0;$$

mais, dans le cas où ces quantités sont variables, elle deviendra

$$\varphi'(x, y, y') + a'\varphi'(a) + b'\varphi'(= 0,$$

qui ne se réduit plus à

$$\varphi'(x, y, y') = 0,$$

parce que les deux fonctions

$$\varphi'(a) \quad \text{et} \quad \varphi'(b)$$

ne sont pas nulles.

Ainsi il est impossible que l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

dans laquelle a et b sont des fonctions de x et y déterminées par les conditions

$$F'(a) = 0, \; F'(b) = 0$$

satifasse généralement à l'équation du second ordre qui résulte de la même équation par l'élimination des quantités a et b, au moyen de ses deux dérivées, première et seconde, prises en regardant a et b comme constantes.

On peut étendre cette théorie aux équations primitives des équations des ordres supérieurs.

Ainsi, si l'on a l'équation primitive

$$F'(x, y, a, b, c) = 0$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires, et qu'on

détermine ces trois quantités par les trois conditions

$$F'(a) = 0, F'(b) = 0, F'(c) = 0$$

on aura une équation primitive singulière triple, qui sera par conséquent la primitive singulière d'une équation du premier ordre, qui sera elle-même la primitive singulière d'une autre du second ordre, laquelle sera enfin la primitive singulière de l'équation du troisième ordre, dont la même équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

sera la primitive ordinaire complette, avec les trois constantes arbitraires a, b, c ; mais cette équation primitive singulière triple ne satisfera ni à l'équation du troisième ordre, ni même à sa primitive singulière du second ordre.

Nous avons démontré plus haut que les fonctions

$$\Phi'(x), \quad \Phi'(y), \quad \Phi'(y') \quad \text{etc}, \Phi'(y^{(n-1)})$$

ont des valeurs infinies dans le cas de l'équation primitive singulière de la dérivée, dont

$$\Phi(x, y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}) = a$$

est la primitive ordinaire, avec la constante arbitraire a.

On peut conclure delà, tout de suite, que tout multiplicateur qui rendra une équation de l'ordre quelconque n telle que

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

une dérivée exacte d'une équation de l'ordre inférieur $n-1$ deviendra nécessairement infini en vertu de l'équation primitive singulière de la même équation.

Car soit M ce multiplicateur; on aura donc par l'hypothèse

$$M\left(y^{(n)} + f\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)\right) = \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right)$$

et l'équation primitive sera

$$\Phi\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right) = a,$$

$$\text{Or } \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}\right) = y^{(n)}\,\Phi'\left(y^{(n-1)}\right) + \Phi'\left(x, y, y' \ldots y^{(n-2)}\right);$$

Donc

$$M = \Phi'\left(y^{(n-1)}\right);$$

par conséquent la quantité M deviendra infinie par la substitution de la valeur de $y^{(n-1)}$ donnée par l'équation primitive singulière.

Cetre conclusion suit aussi directement de la forme même des multiplicateurs que nous avons donnée dans la leçon XIII. En effet si l'équation est du premier ordre, comme

$$y' + f(x, y) = 0$$

elle n'aura qu'une équation primitive telle que

$$F(x, y, a) = 0,$$

et tous les multiplicateurs de cette équation sont nécessairement renfermés dans la formule

$$\frac{\Phi a \times F'(y)}{F'(a)}$$

φa étant une fonction quelconque de a, en supposant qu'on substitue pour a sa valeur tirée de la même équation

$$F(x, y, a) = 0;$$

donc, puisque l'équation primitive singulière rend la fonction $F'(a)$ infinie, tous les multiplicateurs deviendront aussi infinis.

Si l'équation dérivée est du second ordre, comme

$$y'' + f(x, y, y') = 0$$

elle peut avoir deux équations primitives différentes chacune du premier ordre, telles que

$$F(x, y, y', a) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{F}(x, y, y', b) = 0$$

et la forme générale des multiplicateurs, sera

$$\frac{\Phi'(a) \times F'(y')}{F'(a)} + \frac{\Phi'(b) \times \overline{F}'(y')}{\overline{F}'(b)};$$

$\Phi(a, b)$ étant une fonction quelconque de a et b, c'est-à dire, de leurs valeurs déterminées par les équations précédentes.

Or l'équation primitive singulière rend nulle chacune

cune des deux fonctions dérivées

$$F'(a), F'(b);$$

donc tous les multiplicateurs deviendront infinis dans le cas de cette équation; et ainsi de-suite.

Par exemple l'équation

$$y' - \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-b)} - y} = 0$$

qui est la même que celle qu'on a considérée ci-dessus, a pour l'un de ses multiplicateurs la quantité

$$\frac{\sqrt{(x^2+y^2-b)} - y}{\sqrt{(x^2+y^2-b)}},$$

En supposant ce multiplicateur, infini on a

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

pour son équation primitive singulière, ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà trouvé.

On a donc ainsi un nouveau moyen de trouver les équations primitives singulières par les multiplicateurs.

Mais quoiqu'il soit prouvé que tout multiplicateur doit devenir infini par l'équation primitive singulière, on ne peut pas dire réciproquement que toute équation qui rendra un multiplicateur infini, sera une équation singulière. En effet, la formule générale

des multiplicateurs étant pour le premier ordre

$$\frac{\Phi\, a \times F'(y)}{F'(a)}$$

il est évident que sa valeur peut devenir infinie, sans que l'on ait $F'(a) = 0$; car pour cela il suffit que l'une ou l'autre des fonctions $\Phi\, a$, $F'(y)$, reçoive une valeur infinie.

Au reste, on peut se convaincre aussi par ce raisonnement fort simple, que l'équation primitive singulière doit rendre infini tout multiplicateur d'une équation d'un ordre quelconque n de la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0.$$

Car M étant un multiplicateur de cette équation, on aura

$$M\,(y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) =$$

$$\Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)})$$

et l'équation deviendra

$$\Phi'(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

dont l'équation primitive sera

$$\Phi(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = a,$$

a étant une constante arbitraire.

Maintenant l'équation primitive singulière doit

satisfaire à la proposée

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = 0$$

et ne doit pas être comprise dans sa primitive complette

$$\Phi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}) = a.$$

Donc la valeur de $y^{(n-1)}$, tirée de la primitive singulière, étant substituée dans la fonction

$$\Phi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}),$$

ne doit pas la rendre égale à une constante, par conséquent elle ne devra pas rendre nulle sa dérivée

$$\varphi'(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

Donc cette valeur doit rendre nulle la quantité

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)})$$

et ne doit pas rendre nulle la quantité

$$M(y^{(n)} + f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}));$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle rendra la quantité M infinie.

C'est à-peu-près de cette manière que Laplace a

démontré le premier cette proposition importante, que d'autres géomètres avaient entrevue, mais dont on n'avait pas encore donné une démonstration rigoureuse. Voyez son mémoire sur les solutions particulières parmi ceux de l'académie des sciences de 1772.

LEÇON SEIZIÈME.

Comment l'équation primitive singulière resulte de l'équation dérivée.

Par les principes que nous venons d'établir on peut trouver l'équation primitive singulière de toute équation dérivée dont on connait déjà l'équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, ou dont on est en état de trouver cette équation à l'aide d'un multiplicateur.

Nous allons voir maintenant comment on peut déduire l'équation primitive singulière de l'équation dérivée seule.

Pour cela il faut examiner ce que l'équation dérivée devient dans le cas de l'équation primitive singulière.

Reprenons le principe fondamental des équations primitives singulières.

Si $F(x, y, a) = 0$ est l'équation primitive d'une équation du premier ordre, celle-ci sera le résultat de l'élimination de la constante a au moyen de son équation dérivée

$$F'(x, y) = 0;$$

relative à x et y ; et l'équation primitive singulière sera le résultat de l'élimination de la même quan-

tité a au moyen de l'équation dérivée

$$F'(a) = 0$$

relative à a.

Supposons que l'on tire de l'équation

$$F'(x, y) = 0$$

la valeur de a en fonction de x, y et y', que je représenterai par

$$\varphi(x, y, y'),$$

et qu'on substitue cette fonction au lieu de a dans l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

on aura une équation en x, y, y' qui sera la dérivée de la proposée.

Ainsi en désignant simplement par φ la fonction

$$\varphi(x, y, y'),$$

on aura

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

pour l'équation dérivée.

Prenons maintenant la dérivée de celle-ci, et comme φ est une fonction des variables x, y, y', on aura cette équation

$$F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) = 0,$$

où l'expression

$$F'(x, y)$$

est la même chose que le premier membre de l'équation ci-dessus

$$F'(x, y') = 0,$$

si ce n'est qu'à la place de a il y a sa valeur φ, tirée de cette même équation; d'où il s'ensuit que l'expression dont il s'agit sera identiquement nulle, puisqu'elle est censée être le résultat de la substitution de la valeur de a qui la rend nulle.

La dérivée de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

se réduira donc simplement à celle-ci

$$\varphi' F'(\varphi) = 0,$$

laquelle se décompose comme l'on voit en ces deux ci,

$$\varphi' = 0, \quad \text{et} \quad F'(\varphi) = 0.$$

La premiere $\varphi' = 0$, savoir

$$\varphi'(x, y, y') = 0$$

est une équation du second ordre qui donne la valeur de y'' en x, y et y',

Cette équation a pour équation primitive $\varphi = a$ une constante arbitraire; ainsi

$$\varphi = a, \quad \text{et} \quad F(x, y, \varphi) = 0$$

sont deux équations primitives du premier ordre de la même équation du second ordre

$$\varphi' F(\varphi) = 0;$$

donc par la théorie exposée dans la leçon XII éliminant y' de ces deux équations, on aura l'équation primitive de

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

dans laquelle a sera la constante arbitraire ; mais comme y' n'est coutenue que dans la fonction φ, le résultat de cette élimination sera le même que celui de l'élimination de φ, par conséquent ce résultat sera

$$F(x, y, a) = 0,$$

ce qui redonne la même équation primitive, d'où l'on était parti.

Considérons maintenant l'autre équation

$$F'(\varphi) = 0,$$

celle-ci satisfait aussi comme l'on voit à la même équation du second ordre ; mais comme elle ne contient que les fonctions y et y', elle peut être regardée comme une équation primitive du premier ordre de la même équation, mais sans constante arbitraire. Ainsi en éliminant y' par le moyen de celle-ci, et de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

on aura une nouvelle équation primitive de cette même équation, qui sera nécessairement ifférente de l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0.$$

Or comme la quantité y' n'est contenue que da nsla fonction φ, le résultat de l'élimination de y' des deux équations

$$F'(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, \varphi) = 0,$$

sera le même que celui de l'élimination de φ, comme nous l'avons déjà observé plus haut ; et ce résultat

sera

sera évidemment le même que celui de l'élimination de la quantité a des deux équations

$$F'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a) = 0.$$

Donc, par ce qu'on a démontré dans la leçon précédente, ce résultat donnera l'équation primitive singulière de l'équation dérivée, dont

$$F(x, y, a) = 0,$$

est l'équation primitive ordinaire, a étant la constante arbitraire.

D'où l'on doit conclure que l'équation

$$F'_1(\varphi) = 0,$$

donnera par l'élimination de y', la même équation primitive singulière de la proposée du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

qu'on eût trouvée d'après son équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

suivant les principes et la méthode exposée dans la leçon précédente.

On voit, par là, qu'il est toujours possible de mettre l'équation dérivée sous une forme telle que sa dérivée donne elle-même, immédiatement, l'équation primitive singulière, s'il y en a une: et c'est une observation qui n'avait point encore été faite jusqu'ici.

Reprenons l'équation du premier exemple de la

leçon précédente

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

En la regardant comme une équation primitive dont a est la constante arbitraire, pour avoir l'équation dérivée qui ait la propriété dont il s'agit, il faudra y substituer pour a sa valeur $\frac{x}{y}$ tirée de la dérivée

$$x - ay' = 0.$$

Ainsi l'équation dérivée, dont il s'agit, sera

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0$$

En prenant la dérivée de celle ci, on a

$$x - \frac{y}{y'} - x + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^3} = 0$$

équation qui se réduit à

$$\left(\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}\right)\left(\frac{xy''}{y'} - 1\right) = 0$$

comme nous l'avons déjà observé dans la leçon XII.

En la mettant sous la forme

$$-\left(\frac{1}{y} - \frac{xy''}{y'^2}\right)\left(y + \frac{x}{y'}\right) = 0$$

on voit qu'elle revient à

$$\varphi' F'(\varphi) = 0,$$

en supposant

$$F(x, y, a) = x^2 - 2ay - a^2 - b,$$

prenant pour φ la valeur de a tirée de l'équation prime $y - a x' = 0$.

Le facteur du premier ordre donne l'équation

$$y + \frac{x}{y'} = 0,$$

d'où l'on tire

$$y' = - \frac{x}{y}$$

valeur qui étant substituée dans l'équation du premier ordre la réduit à

$$x^2 - b + 2 y^2 - y^2 = 0.$$

savoir

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

équation primitive, singulière comme nous l'avons déjà trouvé, car l'équation dérivée, que nous considerons ici, est la même que l'équation

$$y' \sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y y' - x = 0$$

que nous avons considérée dans le premier exemple de la leçon précédente; mais sous cette forme elle n'aurait pas son équation prime décomposable en deux facteurs.

Le facteur du second ordre

$$\frac{1}{y'} - \frac{x y''}{y'^2}$$

étant fait égal à zero donnera la valeur de

$$y'' = \frac{y'}{x}$$

On aurait aussi facilement par ce facteur l'équation

primitive, car étant la fonction dérivée exacte de $\frac{x}{y'}$, il donnera tout de suite l'équation primitive du premier ordre $\frac{x}{y'} = a$; multipliant par $2y'$ et prenant de nouveau les fonctions primitives, il vient

$$x^2 = 2ay + c,$$

a et c étant des constantes arbitraires; mais la proposée n'étant que du premier ordre, ne peut avoir qu'une constante arbitraire. On y substituera donc pour y, et y' les valeurs qu'on vient de trouver,

$$\frac{x^2 - c}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{x}{a},$$

et l'on aura

$$x^2 - b - x^2 + c - a^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$c = a^2 + b$$

de sorte que l'équation primitive sera

$$x^2 = 2ay + a^2 + b = 0,$$

comme ci-dessus.

Il n'est pas même nécessaire de passer à une seconde équation primitive ; car ayant trouvé

$$\frac{x}{y'} = a,$$

il n'y a qu'à substituer tout de suite la valeur de

$$y' = \frac{x}{a}$$

dans la proposée du premier ordre, et l'on aura aussi

$$x^2 - b - 2ay - a^2 = 0.$$

Considérons les équations du second ordre.

Soit $F(x, y, y', a) = 0$

l'équation primitive du premier ordre d'une équation dérivée du second.

En éliminant a, au moyen de l'équation,

$$F'(x, y, y') = 0,$$

on aura l'équation du second ordre ; et en l'éliminant au moyen de l'équation

$$F'(a) = 0,$$

on aura l'équation primitive singulière.

Soit $\varphi(xy, y', y'')$,

on simplement φ, la valeur de a en fonction de x, y, y', y'' tirée de l'équation

$$F'(x, y, y') = 0,$$

en substituant cette valeur dans l'équation primitive, on aura une équation dérivée de la forme

$$F(x, y, y', \varphi) = 0;$$

et si on en prend l'équation dérivée, il est visible que la partie

$$F'(x, y, y'),$$

relative à la variation de x, y, y', sera identiquement nulle, puisque la quantité φ, qui y est regardée comme constante, est supposée déterminée par l'équation même

$$F'(x, y, y') = 0.$$

Il ne restera donc que l'équation

$$\varphi' F' (\varphi) = 0,$$

qui se décompose en

$$\varphi' = 0, \quad \text{et} \quad F' (\varphi) = 0.$$

L'équation $\varphi' = 0$, sera du troisième ordre, et donnera la valeur de y'''. Son équation primitive sera évidemment $\varphi = a$, en prenant a pour une constante quelconque. Eliminant y'', qui est contenu dans φ, au moyen de l'équation dérivée

$$F (x, y, y', \varphi) = 0,$$

on aura le même résultat que par l'élimination de φ; c'est-à-dire

$$F (x, y, y', a) = 0,$$

équation primitive.

L'autre équation

$$F' (\varphi) = 0$$

donnera aussi par l'élimination de y'', le même résultat que par l'élimination de φ, et par conséquent le même résultat que par l'élimination de a, au moyen des équations

$$F' (a) = 0 \quad \text{et} \quad F (x, y, y', a) = 0,$$

qui sont les mêmes, en y changeant a en φ.

Donc ce résultat sera l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre, dont

$$F (x, y, y', a)$$

est l'équation primitive du premier ordre.

L'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0,$$

que nous avons déjà considérée dans les leçons précédentes, a pour dérivée

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)y''' - \frac{2y''^2}{x} + \frac{2y'y''}{x^2} = 0$$

qu'on peut mettre sous cette forme

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x} = 0\right)$$

. Le facteur $y'' - \frac{y'}{x}$

n'étant que du même ordre que la proposée, donnera par l'élimination de y'', une équation primitive singulière de celle-ci. Car en faisant

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0,$$

on a $y'' = \frac{y'}{x}$,

valeur, qui étant substituée dans la proposée, donne

$$-\frac{y'^2}{x^2} + 1 = 0.$$

Savoir $x^2 - y'^2 = 0$,

comme nous l'avons trouvé dans la leçon précédente.

L'autre facteur donnera l'équation du troisième ordre,

$$y''' - \frac{y''}{x} = 0,$$

qui étant divisée par x, a pour primitive du sect ordre

$$\frac{y''}{x} = \frac{1}{a},$$

a étant une constante arbitraire; celle-ci donne

$$y'' = \frac{x}{a},$$

substituant cette valeur dans la proposée, on a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2y'}{a} + 1 = 0.$$

Savoir $$x^2 - 2ay' + a^2 = 0,$$

équation primitive, comme on l'a vu dans la leç citée.

Le même procédé s'applique aux équations d ordre quelconque; et l'on en peut conclure en gé ral, que toute équation dérivée est susceptible d'i forme telle que sa dérivée ait deux facteurs, d l'un réponde à l'équation primitive ordinaire, dont l'autre donne immédiatement l'équation pri tive singulière, s'il y en a une; ce qui jette un nouv jour sur la nature des équations primitives singuliè Car il est évident que les deux facteurs de l'équat dérivée étant indépendans l'un de l'autre, doiv satisfaire chacun en particulier à cette équation parconséquent aussi à son équation primitive p posée.

En même temps on voit que le facteur, qui doi l'équat

l'équation primitive singulière, et qui est du même ordre que la proposée, ne pourra pas satisfaire aux équations des ordres supérieurs, puisqu'il ne satisfait pas à celle qui résulte de l'autre facteur, et qui contient seule les fonctions dérivées d'un ordre plus élevé que la proposée.

Je considere maintenant que comme toute équation dérivée du premier ordre, telle que

$$f(x, y, y') = 0$$

ne peut être que le résultat de l'élimination de la constante arbitraire a, au moyen de l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

ainsi que nous l'avons vu dans la leçon XII ; et que l'équation

$$F(x, y, p) = 0$$

est déjà le résultat de cette élimination par ce que nous avons démontré plus haut; il s'ensuit de la théorie connue de l'élimination, que si les deux équations

$$f(x, y, y') = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, p) = 0$$

ne sont pas identiques, elles ne peuvent différer que par un facteur qui affectera l'une des deux et qui ne pourra être qu'une fonction de x, y et y'.

Supposons donc que M soit un pareil facteur, ensorte que l'on ait l'équation identique

$$f(x, y, y') = \mathrm{M}\,\mathrm{F}(x, y, \varphi).$$

On aura donc aussi

$$\mathrm{F}(x, y, \varphi) = \frac{f(x, y, y')}{\mathrm{M}}$$

et prenant les fonctions dérivées, on aura

$$\varphi'\,\mathrm{F}'(\varphi) = \frac{f'(x, y, y')}{\mathrm{M}} - \frac{\mathrm{M}'\,f(x, y, y')}{\mathrm{M}^2}$$

puisque nous avons vu que la dérivée de $\mathrm{F}(x, y, \varphi)$ se réduit a $\varphi'\ \mathrm{F}'(\varphi)$.

On aura donc ainsi

$$f'(x, y, y') = \mathrm{M}\,\mathrm{F}'(\varphi) \times \varphi' + \frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}} f(x, y, y')$$

c'est la forme générale de la dérivée de la fonction

$$f(x, y, y')$$

qui forme le premier membre de l'équation proposée.

On voit par-là qu'étant proposée l'équation du premier ordre

$$f(x, y, y') = 0$$

on pourra satisfaire à sa dérivée

$$f'(x, y, y') = 0$$

indépendamment de la valeur de y'' par le moyen de l'équation du même ordre

$$F'(p) = 0$$

combinée avec la proposée ; de sorte que ces deux équations pourront être regardées également comme des équations primitives du premier ordre de la même équation dérivée

$$f'(x, y, y') = 0$$

du second ordre. Par conséquent il n'y aura qu'à éliminer y' entr'elles pour avoir une équation primitive de la proposée, laquelle ne sera qu'une primitive singulière comme nous l'avons démontré ci-dessus.

Maintenant si dans la fonction dérivée

$$f'(x, y, y')$$

on separe la partie affectée de y'', elle devient

$$y''f'(y') + f'(x, y)$$

suivant la notation que nous avons adoptée. Ainsi la dérivée de l'équation proposée

$$f(x, y, y') = 0$$

sera

$$y''f'(y') + f'(x, y) = 0,$$

et il est visible qu'on ne peut satisfaire à cette équation indépendamment de la valeur de y'' qu'en égalant séparément à zero les deux fonctions

$$f'(y') \quad \text{et} \quad f'(x, y);$$

il est facile de voir, en effet, par la comparaison de l'expression précédente de

$$f'(x, y, y')$$

avec la forme générale trouvée ci-dessus, que les deux équations

$$F'(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, y') = 0$$

emportent ces deux-ci

$$f'(y') = 0 \quad \text{et} \quad f'(x, y) = 0$$

et réciproquement.

On aura donc l'équation primitive singulière de la proposée

$$f(x, y, y') = 0$$

en faisant, dans sa dérivée

$$y'' f'(y') + f'(x, y) = 0,$$

les deux équations séparées

$$f'(y') = 0, \text{ et } f'(x, y) = 0,$$

et éliminant la fonction y' au moyen de la proposée.

Si les deux résultats donnent la même équation entre x et y, ce sera l'équation primitive singulière ; sinon ce sera une marque que la proposée n'admet pas d'équation primitive de cette espèce.

Lorsque les deux fonctions

$$f'(y') \text{ et } f'(x, y),$$

ont un facteur commun, ce facteur égalé à zero, remplit les deux conditions, et donne l'équation primitive singulière par l'élimination de y', au moyen

de la proposée. C'est le cas où celle-ci est de la forme

$$F(x, y, p) = 0,$$

comme nous l'avons vu, au commencement de cette leçon. Il y a au reste une forme plus générale que celle-ci, où la dérivée est toujours décomposable en deux facteurs, dont l'un donne l'équation primitive singulière ; nous en parlerons plus bas.

L'équation du premier ordre

$$y'^2(x^2 - b) - 2xyy' - x^2 = 0,$$

qui est la même que nous avons considérée au commencement de cette leçon, mais multipliée par y'^2 a pour dérivée

$$\left(y'(x^2 - b) - xy\right)y'' - 2(yy' + x) = 0.$$

On voit ici que les deux fonctions

$$y'(x^2 - b) - xy \quad \text{et} \quad yy' + x,$$

n'ont aucun facteur commun ; cependant si on les fait, chacune séparément égale à zero, elles donnent les deux valeurs de y',

savoir $\dfrac{xy}{x^2 - b}$ et $-\dfrac{x}{y}$,

qui étant substituées dans la proposée, donnent ces deux-ci

$$\frac{x^2y^2}{x^2 - b} + x^2 = 0, \quad \frac{x^2(x^2 - b)}{y^2} + x^2 = 0,$$

lesquelles se réduisent à la même,

$$\text{Savoir } x^2(x^2+y^2-b)=0.$$

Ainsi

$$x^2+y^2-b=0,$$

est l'équation primitive singulière de la proposée, comme nous l'avions déjà trouvé.

Je remarque maintenant que l'équation du premier ordre

$$f(x, y, y')=0,$$

ayant pour dérivée

$$y''f'(y')+f'(x, y)=0,$$

elle donne en général

$$y''=-\frac{f'(x, y)}{f'(y')};$$

Mais nous venons de voir que dans le cas de l'équation primitive singulière, on a séparément

$$f'(y')=0 \quad \text{et} \quad f'(x, y)=0;$$

donc on aura dans ce cas

$$y''=\frac{0}{0};$$

ce qui donne cette règle générale, et fort simple pour trouver l'équation primitive singulière de toute équation du premier ordre, lorsqu'il y en a une.

Cherchez, en prenant les fonctions dérivées, la valeur de la fonction seconde y'', et supposez-la égale à zéro, divisé par zero; vous aurez des équations en x, y et y', qui étant combinées avec

roposée, donneront par l'élimination de y', autres équations en x et y. Si elles ont un ur commun, ce sera l'équation primitive sinère de la proposée.

n peut appliquer ici l'exemple que nous venons porter ci-dessus.

oit encore l'équation du premier ordre

$$(x y' - y)(x y' - 2 y) + x^3 = 0.$$

a dérivée sera

$$2 x y' - 3 y) y'' - x y'^2 + y y' + 3 x^2 = 0,$$

l'on tire

$$y'' = \frac{x y'^2 - y y' - 3 x^2}{2 x y' - 3 y}$$

isant cette expression

$$= \frac{0}{0},$$

ura les deux équations

$$y'^2 - y y' - 3 x^2 = 0, \quad 2 x y' - 3 y = 0,$$

il faudra éliminer y' par le moyen de la propo. La seconde donne

$$y' = \frac{3 y}{2 x};$$

valeur substituée d'abord dans la première, ie celle ci.

$$\frac{3 y^2}{4 x} - 3 x^2 = 0,$$

et étant substituée dans la proposée, elle donne

$$-\frac{y^2}{4}+x^3=0;$$

ces deux équations se réduisent, comme l'on voit l'une et l'autre à celle-ci

$$y^2-4x^3=0$$

qui sera par conséquent l'équation primitive singulière de la proposée.

On peut s'en assurer en effet par l'équation primitive qui est

$$y-ax-\frac{x^2}{a}=0$$

où a est la constante arbitraire. Sa dérivée relative à a, sera

$$-x+\frac{x^2}{a^2}=0$$

laquelle donne

$$a^2=x \quad \text{et} \quad a=\sqrt{x};$$

et l'équation primitive devient par la substitution de cette valeur,

$$y-2x\sqrt{x}=0 \quad \text{savoir} \quad y^2-4x^3=0$$

la même que nous venons de trouver.

Il est facile de voir par l'expression générale de y'', que non seulement cette expression devient $\frac{0}{0}$ en vertu de l'équation primitive singulière, mais que les expressions

expressions des fonctions suivantes y''', y^{IV} etc, deviendront aussi $\frac{0}{0}$ en les réduisant d'abord en simples fonctions de x, y par la substitution successive des valeurs de y', y'' etc, tirées de l'équation proposée et substituant ensuite la valeur de y en x, donnée par l'équation primitive singulière.

On peut regarder cette propriété de l'équation primitive singuliere comme son vrai caractere distinctif; et l'on peut se convaincre d'ailleurs que son existence dépend en effet de ce que les valeurs des fonctions y'', y''' etc, des ordres supérieurs à la proposée, demeurent indéterminées.

Car si ces valeurs ne devenoient pas indéterminées dans le cas de l'équation primitive singuliere, on pourrait, dans ce cas même, employer la formule générale donnée dans la leçon XII,

$$y = \overset{\circ}{y} + \overset{\circ}{y}' x + \overset{\circ}{y}'' \frac{x^2}{2} + \overset{\circ}{y}''' \frac{x^3}{2.3} + \text{etc},$$

dans laquelle $\overset{\circ}{y}, \overset{\circ}{y}', \overset{\circ}{y}''$ etc, sont les valeurs qui répondent à $x = 0$; et la quantité $\overset{\circ}{y}$ qui est la constante arbitraire recevrait alors une valeur particulière, dépendante de cette équation; de sorte que la valeur de y en x au lieu d'être une valeur singu-

lière ne serait plus qu'un cas particulier de la valeur générale, contre l'hypothèse.

Il arrive donc ici, ce qui a lieu dans les formules générales lorsqu'il y a des cas qu'elles ne peuvent pas représenter, elles donnent alors zero divisé pas zero ; c'est, pour ainsi dire, le moyen que l'analise emploie pour échapper aux contradictions; les racines imaginaires n'indiquent pas, à proprement parler, une contradiction mais une impossibilité.

Cette théorie s'applique également aux équations des ordres supérieurs au premier, et fournit des conclusions semblables.

En représentant par

$$F(x, y, y', a) = o$$

l'équation primitive du premier ordre, d'une équation du second ordre, nous avons vu que celle-ci peut se réduire à

$$F(x, y, y', \varphi) = o$$

et que sa dérivée sera alors

$$\varphi' \; F'(\varphi) = o.$$

Or quelle que puisse être la forme sous laquelle une équation proposée du second ordre pourra se présenter, comme, en derniere analise, elle doit toujours être le resultat de la même élimination qui donne l'équation $F'(x, y, y', \varphi) = o$, il s'ensuit qu'elle ne pourra être que celle-ci multipliée par une

fonction quelconque du même ordre, ou d'un ordre inférieur.

Ainsi si l'équation proposée est

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

on aura nécessairement

$$f(x, y, y', y'') = M\,F(x, y, y', \varphi),$$

M étant une fonction de x, y, y', y''.

De-là en prenant les fonctions dérivées, et mettant $F'(\varphi) \times \varphi'$ pour $F'(x, y, y', \varphi)$, on aura, comme plus haut, l'équation

$$f'(x, y, y', y'') = M\,F'(\varphi) \times \varphi' + \frac{M'}{M} f(x, y, y', y'').$$

D'où il est aisé de conclure que l'on pourra satisfaire à la dérivée

$$f'(x, y, y', y'') = 0$$

de la proposée, indépendamment de la valeur de la fonction tierce y''', au moyen des deux équations du second ordre

$$F'(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, y', y'') = 0$$

dont la seconde est la proposée, et qu'on aura l'équation primitive singulière de celle-ci, en éliminant y'' des mêmes équations.

Or la dérivée de la proposée étant de la forme

$$y''' f'(y'') + f'(x, y, y') = 0,$$

on n'y peut satisfaire indépendamment de la valeur de y''' que par les deux équations séparées

$$f'(y'') = 0 \quad \text{et} \quad f'(x, y, y') = 0.$$

Il faudra donc éliminer y'' de chacune de ces deux équations, au moyen de la proposée

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

et si les deux résultats donnent une même équation, ce sera l'équation primitive singulière de la proposée.

On voit, en même-tems, que puisqu'on a, en général,

$$y''' = -\frac{f'(x, y, y')}{f'(y'')}$$

les deux équations, dont il s'agit, rendent la valeur de y''' égale à $\frac{0}{0}$; de sorte que l'on peut regarder la condition de

$$y''' = \frac{0}{0}$$

comme celle qui détermine l'équation primitive singulière de la proposée du second ordre.

En appliquant les mêmes principes aux équations d'un ordre quelconque n^{eme}, on en conclura que pour trouver son équation primitive singulière, si elle

n a une, il faudra tirer de sa dérivée, la valeur de
ı fonction $y^{(n+1)}$ de l'ordre suivant, et la faire

$$= \frac{0}{0},$$

en égalant séparément le numérateur et le dénominateur à zero, et éliminer ensuite de ces deux équations la fonction $y^{(n)}$ au moyen de la proposée.

Si ces deux éliminations donnent un même résultat, ce sera l'équation cherchée.

Nous avons vu plus haut que l'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2 y' y''}{x} + 1 = 0$$

a pour dérivée une équation résoluble en facteurs, dont l'un, qui n'est que du second ordre, donne sur le champ, l'équation primitive singulière, par l'élimination de y''. Mais si la même équation etait proposée sous la forme

$$x y''^2 - 2 y' y'' + x = 0$$

sa dérivée

$$2 (x y'' - y') y''' - y''^2 + 1 = 0$$

ne presenterait plus de facteur.

Or elle donne

$$y''' = \frac{y''^2 - 1}{2 (x y'' - y'}$$

Egalant à zéro séparément le numérateur et le dénominateur, on a ces deux équations

$$y''^2 - 1 = 0, \quad \text{et} \quad x\,y'' - y' = 0.$$

La première donne

$$y'' = \pm 1,$$

ce qui étant substitué dans la proposée, elle devient

$$2\,(x \pm y') = 0, \quad \text{Savoir} \quad y'^2 - x^2 = 0$$

La deuxième donne

$$y'' = \frac{y'}{x},$$

ce qui étant substitué dans la proposée, elle devient

$$-\frac{y'^2}{x} + x = 0 \quad \text{Savoir} \quad y'^2 - x = 0.$$

Ainsi cette équation est la primitive singulière de la proposée, comme nous l'avons déjà trouvé.

Considérons encore l'équation du second ordre

$$y - x\,y' + \frac{x^2}{2}\,y'' - (y' - x\,y'')^2 - y''^2 = 0.$$

Prenons les fonctions dérivées pour avoir la valeur de y''', on trouvera

$$y' - y' + x\,y'' - x\,y'' + \frac{x^2}{2}\,y'''$$
$$+ 2\,(y' - x\,y'')\,x\,y''' - 2\,y''\,y''' = 0.$$

Savoir

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2(y' - x y'')\,x - 2y''\right) y''' = 0$$

d'où l'on voit que y''' deviendra $\frac{0}{0}$ en égalant à zéro le facteur par lequel il est multiplié.

On aura ainsi cette seule condition

$$\frac{x^2}{2} + 2(y' - x y'')\,x - 2y'' = 0$$

d'où l'on tire

$$y'' = \frac{4xy' + x^2}{4(1 + x^2)},$$

Cette valeur étant substituée dans la proposée, donnera l'équation singulière

$$y - xy' + \frac{x^2}{2} \times \frac{4xy' + x^2}{4(1 + x^2)}$$

$$- \frac{(4y' - x^3)^2 + (4xy' + x^2)^2}{16(1 + x^2)^2} = 0$$

laquelle se réduit tout de suite à celle-ci

$$y - \frac{2x + x^3}{2(1 + x^2)}\,y' + \frac{x^4 - 16y'^2}{16(1 + x^2)} = 0$$

L'équation du troisième ordre

$$\left(\frac{x^2}{2} + 2(y' - x y'')\,x - 2y''\right) y''' = 0$$

que nous venons de trouver pour la dérivée de la proposée du second ordre, donne naturellement $y''' = o$ d'où l'on tire successivement en prenant les fonctions primitives

$$y'' = a, y' = ax + b$$

et $$y = \frac{a}{2} x^2 + bx + c,$$

a, b, c, étant des constantes arbitraires, relativement à l'équation $y''' = o$; mais comme la proposée n'est que du second ordre, elle aura une constante arbitraire de moins, et en y substituant les valeurs précédentes de y, y', y'' elle devient

$$c - b^2 - a^2 = o,$$

ce qui donne

$$c = a^2 + b^2,$$

de manière que l'équation primitive en x et y devient

$$y = \frac{a}{2} x^2 + bx + a^2 + b^2$$

comme on l'a vu plus haut.

Ainsi dans ce cas, les deux facteurs de la dérivée de l'équation proposée donnent directement, l'un, l'équation primitive singulière du premier ordre, l'autre, l'équation primitive en x et y, comme nous l'avons déjà vu ci-dessus, dans un autre exemple.

Nous

Nous avons vu, au commencement de cette leçon, que l'équation dérivée d'une équation primitive $(x, y, a) = o$ peut-être représentée par $F(x, y, \varphi) = o$ ou φ est mis pour $\varphi(x, y, y')$, cette fonction étant la valeur de a, tirée de l'équation prime $F'(x, y) = o$; et nous avons vu en même tems que l'équation primitive singulière rend la fonction $F(\varphi)$ nulle.

Supposons que l'équation dérivée proposée soit réduite à la forme

$$y' + f(x, y) = o$$

donc si dans l'équation

$$F(x, y, \varphi) = o$$

on substitue à la place de y' sa valeur $-f(x, y)$, elle deviendra nécessairement identique; par conséquent ses deux équations dérivées relatives l'une à x et l'autre à y, auront lieu chacune en particulier.

On aura donc ainsi puisque la quantité y' n'est contenue que dans la fonction φ, ces deux équations dans lesquelles $F'(x)$, $F'(y)$ et $F'(\varphi)$ dénotent comme à l'ordinaire les fonctions dérivées de $F(x, y, \varphi)$ prises relativement à x, y, et φ

$$F'(x) - F'(\varphi) \times \varphi'(y') \times f'(x) = o$$

$$F'(y) - F'(\varphi) \times \varphi'(y') \times f'(y) = o$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{F'(\varphi) \times \varphi'(y')}$$

$$f'(y) = \frac{F'(y)}{F'(\varphi) \times \varphi'(y')}$$

Or l'équation primitive singulière rend

$$F'(\varphi) = 0 ;$$

donc elle rendra infinies les deux fonctions

$$f'(x) \quad \text{et} \quad f'(y).$$

Ce qui fournit un critaire fort simple pour reconnaître si une valeur qui satisfait sans constante arbitraire à une équation dérivée donnée, est une valeur singulière ou simplement un cas particulier de la valeur générale.

Cette propriété peut servir aussi à trouver les valeurs singulières dont une équation dérivée est susceptible ; car si l'équation qui rend $f'(x)$ et $f'(y)$ infinies satisfait en même-tems à la proposée

$$y' + f(x, y) = 0$$

elle en sera l'équation primitive singulière.

L'équation,

$$y' - \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y} = 0$$

qu'on a déjà considérée plus haut, donne

$$f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y}$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y}$$

$$+ \frac{x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} \times (\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y)^2},$$

$$f'(y) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} \times (\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y)^2}$$

Ces deux quantités deviennent infinies par la supposition de

$$\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y = 0$$

ainsi que par celle de

$$\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} = 0,$$

la première donne

$$x^2 - b = 0$$

valeur qui ne peut satisfaire à la proposée qu'en faisant $b = 0$. La seconde donne

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

équation qui satisfait à la proposée et qui en est par conséquent l'équation primitive singulière, comme on l'a déjà vu plus haut.

Appliquons la même théorie aux équations du second ordre, on a vu qu'elles peuvent être ré-

présentées par $F'(x, y, y', \varphi) = o$ en supposant que $F(x, y, y', a) = o$ soit l'équation primitive du premier ordre, et que φ ou $\varphi(x, y, y')$ soit la valeur de a tirée de l'équation prime $F'(x, y, y') = o$.

On a vu en même-tems que l'équation primitive singulière est donnée alors par l'équation $F'(\varphi) = o$.

Supposons maintenant que l'équation proposée soit réduite à la forme

$$y'' + f(x, y, y') = o$$

Donc si dans l'équation

$$F(x, y, y', \varphi) = o$$

on substitue pour y'' sa valeur $-f(x, y, y')$ on on aura une équation identique, dont par conséquent la dérivée aura lieu par rapport à chacune des variables x, y, y' en particulier.

Ainsi comme la fonction y'' n'est contenue que dans la fonction φ, on aura ces trois équations

$$F'(x) - F'(\varphi) \times \varphi'(y') \times f'(x) = o$$

$$F'(y) - F'(\varphi) \times \varphi'(y') \times f'(y) = o.$$

$$F'(y') - F'(\varphi) \times \varphi'(y') \times f'(y') = o;$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{F'(\varphi) \times \varphi'(y')},$$

$$f'(y) = \frac{F'(y)}{F'(\varphi) \times \varphi'(y')},$$

$$f'(y') = \frac{F'(y')}{F'(\varphi) \times \varphi'(y')}.$$

L'équation primitive singulière, étant donnée par l'équation

$$F'(\varphi) = 0,$$

il s'ensuit qu'elle rendra infinies les trois fonctions dérivées

$$f'(x), f'(y), f'(y'), \text{ etc.}$$

En général on pourra prouver de la même manière, que si l'on a une équation de l'ordre n^{eme}, réduite à la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = 0$$

Son équation primitive singulière rendra infinies les fonctions dérivées $f'(x), f'(y), f'(y')$ etc., jusqu'à la suivante, inclusivement,

$$f'(y^{(n-1)})$$

Pour confirmer *a posteriori*, ce que nous venons de

démontrer, considérons une équation du premier ordre, telle que

$$y' + f(x, y) = 0$$

à laquelle satisfasse une valeur singulière de y que nous désignerons par X fonction de x.

On aura donc par l'hypothèse

$$X' + f(x, X) = 0;$$

et pour que la valeur X ne soit pas comprise parmi les valeurs de y données par l'équation primitive, il faudra qu'en supposant en général

$$y = X + z,$$

z étant une nouvelle variable, la valeur de z tirée de l'équation primitive ne puisse jamais être nulle.

Substituons donc $X + z$ au lieu de y dans l'équation proposée, on aura

$$X' + z' + f(x, X + z) = 0$$

Developpons la fonction

$$f(x, X + z)$$

suivant les puissances de z, on aura généralement, en rapportant les fonctions dérivées à la seule variable X,

$$f(x, X + z) = f(x, X) + zf'(X) + \frac{z^2}{2} f''(X) + \text{etc},$$

donc, faisant cette substitution, on aura, à cause de

$$X' + f(x, X) = o,$$

l'équation

$$z' + zf'(X) + \frac{z^2}{2} f''(X) + \text{etc}, = o$$

qui servira à déterminer z en x.

Or si la quantité z pouvait devenir nulle, elle pourrait aussi être très petite.

Supposons-là d'abord très petite, et cherchons-en la valeur par approximation.

Pour cela on négligera d'abord vis-à-vis du terme qui contient z, les suivans qui contiennent z^2, z^3 etc, comme étant beaucoup plus petits, et l'on aura pour la première approximation, l'équation

$$z' + zf'(X) = o,$$

laquelle étant divisé par z, a pour équation primitive

$$l.z + \overline{X} = k,$$

en prenant $\overline{X}$ pour la fonction primitive de $f'(X)$ et k pour une constante arbitraire; de-là on tire

$$z = e^{(k - \overline{X})} = e^{k} \times e^{-\overline{X}} = a\, e^{-\overline{X}}$$

en faisant

$$a = e^{k}.$$

Ayant ainsi la première valeur approchée de z,

on la substituera dans les termes négligés et on pourra trouver une seconde valeur plus approchée, et ainsi de suite.

De cette manière la valeur de z contiendra la constante arbitraire a, et elle deviendra nulle en faisant $a = 0$, par conséquent elle ne sera pas une valeur singulière, contre l'hypothèse.

On doit conclure de-là que pour X soit une valeur singulière, non comprise dans la valeur générale, il faut que le développement de

$$f(x, X+z)$$

contienne d'autres puissances de z que les puissances entières et positives.

Supposons donc que ce développement donne en général

$$f(x, X+z) = f(x, X) + P z^m + Q z^n + \text{etc},$$

m, n etc, étant des nombres quelconques qui vont en augmentant et P, Q etc, des fonctions de x; on aura l'équation en z

$$z' + P z^m + Q z^n + \text{etc}, = 0.$$

On aura donc aussi pour la première approximation

$$z' + P z^m + 0,$$

équation qui étant divisée par z^m a pour équation primitive

primitive

$$\frac{z^{1-m}}{1-m} + V = k,$$

en prenant V pour la fonction primitive de P, et k pour la constante arbitraire.

Or pour que X soit une valeur singulière de y, il faut que la valeur $z = 0$, qui y répond, ne puisse pas être contenue dans cette équation.

Il faut donc que l'exposant $1-m$ de z soit un nombre positif; car s'il était négatif z^{1-m} deviendrait infini lorsque $z = 0$, et répondrait à la supposition de k infini.

S'il était nul on aurait le cas que nous venons d'examiner où $m = 1$ et où $z = 0$ répond aussi à k infini.

Au contraire lorsque $1 - m$ est positif, $z = 0$ donne aussi $z^{1-m} = 0$ et l'équation devient alors $V = k$, ce qui ne peut pas être.

Donc pour que X puisse être une valeur singulière de y il faut que le développement de

$$f(x, X + z)$$

contienne une puissance z^m ou $m < 1$.

Or en considérant la fonction $f(x, y)$ son développement lorsqu'on y met $y + z$ à la place de y est en général

$$f(x, y) + zf' y + \text{etc},$$

donc suivant la théorie que nous avons exposée dans la leçon VIII pour que ce développement donne dans le cas de $y = X$ une puissance de z moindre que la première il faudra que dans ce cas la valeur de $f'(y)$ c'est-à-dire de $f'(X)$ devienne infinie.

Or l'équation proposée donne

$$y' = -f(x, y),$$

et prenant les fonctions dérivées

$$y'' = -f'(x) - y'f'(y) = -f'(x) + f'(y) \times f(x, y);$$

donc

$$f'(x) = f'(y) \times f(x, y) - y''.$$

Par conséquent, on aura, lorsque $y = X$,

$$f'(y) = \infty \quad \text{et} \quad f'(x) = \infty$$

comme nous l'avons trouvé par la nature même des équations dérivées.

Dans l'exemple ci-dessus, où

$$f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2 - b)} - y}$$

la valeur singulière de y est

$$\sqrt{(b - x^2)};$$

ainsi $X = \sqrt{(b - x^2)}$,

et substituant $\sqrt{(b - x^2)} + z$

à la place de y, la fonction dont il s'agit, devient

$$\frac{x}{\sqrt{(2z\sqrt{(b-x^2)} + z^2)} - \sqrt{(b-x^2)} - z}$$

laquelle étant développée suivant les puissances de z donne

$$\frac{x}{\sqrt{(b-x^2)}} - \frac{\sqrt{2z}}{(b-x^2)^{\frac{3}{4}}} - \text{etc};$$

où l'on voit que le premier terme du développement contient la puissance $\sqrt{z}$, dont l'exposant $\frac{1}{2}$ est moindre que l'unité.

D'ailleurs nous avons déjà vu que les valeurs de

$$f'(y) \quad \text{et} \quad f'(x)$$

deviennent infinies lorsque

$$y^2 + x^2 - b = 0.$$

L'analise par laquelle nous venons de prouver que le développement de

$$f(x, y + z)$$

doit contenir une puissance de z moindre que la première, lorsqu'on donne à y une valeur singulière, est due à Euler qui a donné ainsi le premier critaire général pour reconnaître si une valeur qui satisfait à une équation différentielle est ou non une valeur singulière non comprise dans l'intégrale. Voyez le premier volume de son calcul intégral, problême 72.

Il restait à déduire de-là, la règle que dans ce cas la valeur de $f'(y)$ devient nécessairement infinie ; c'est ce que Laplace a fait depuis dans le mémoire déjà cité sur les solutions particulières des équations différentielles, imprimé dans le recueil de l'académie des sciences pour l'année 1778.

LEÇON DIX-SEPTIÈME.

Équations dérivées qui ont des équations primitives singulières données. Analyse d'une classe d'équations de tous les ordres qui ont toujours nécessairement des équations primitives singulières.

Si les équations primitives singulières ont moins d'étendue que les équations primitives, proprement dites, parce qu'elles ne renferment aucune constante arbitraire, on peut les regarder, sous un autre point de vue, comme plus générales que celle-ci, parce qu'une même équation primitive singulière peut répondre à une infinité d'équations dérivées ; et c'est un problême indéterminé de trouver une équation dérivée qui ait une équation primitive singulière donnée. Comme ce problême est curieux et qu'il peut être utile dans quelques occasions, nous allons en donner ici une solution, pour servir de complément à notre théorie des équations primitives singulières.

Représentons par

$$F(x, y, a, b) = 0$$

une équation primitive entre x, y et deux constantes a et b dont l'une soit une fonction quelconque de l'autre, ou qui dépendent en général l'une de l'autre par l'équation

$$\Phi(a, b) = 0$$

On aura l'équation dérivée qui en resulte, en éliminant ces deux coustantes au moyen des trois équations.

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad F'(x, y) = 0, \Phi(a, b) = 0.$$

Donc si on tire des deux premières les valeurs de a et b en fonctions de x, y, y', et qu'on désigne ces valeurs par

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y'),$$

on aura l'équation dérivée en substituant ces fonctituant à la place de a et b dans l'équation de condition

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Ainsi en mettant simplement φ et ψ pour les fonctions dont il s'agit, l'équation dérivee, sera

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0.$$

Donc réciproquement toute équation dérivée de cette forme aura pour équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

les deux constantes a et b étant liées par l'équation

$$\Phi(a, b) = 0;$$

et l'on aura en même-tems

$$\varphi(x, y, y') = a, \quad \psi(x, y, y') = b.$$

Donc toute valeur de y en x qui satisfera à la même équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0$$

et qui ne rendra pas les fonctions φ et ψ constantes, ne pourra pas être comprise dans l'équation primitive générale, et sera par conséquent une valeur singulière.

Soit $y = \Sigma x$ cette valeur singultère, Σx étant une fonction donnée de x, en substituant Σx et $\Sigma' x$ au lieu de y et y' dans les fonctions φ et ψ elles deviendront de simples fonctions de x, et éliminant x entr'elles on aura une équation entre φ et ψ qu'on prendra pour l'équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0;$$

Ainsi l'équation $y = \Sigma x$ satisfera à l'équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0,$$

mais ne rendant pas les fonctions φ et ψ constantes, elle ne sera pas comprise dans l'équation primitive générale, et ne sera par conséquent qu'une équation primitive singulière.

La solution se réduit donc à ceci. Soit $y = \Sigma x$ la valeur singulière donnée de y, en fonction de x. Ayant pris une équation quelconque

$$F(x, y, a, b) = 0$$

en x, y, et deux constantes a et b; de cette équation et de son équation dérivée $F'(x, y) = 0$, on

tirera les valeurs de a et b en fonction de x, y, y'; on substituera dans ces valeurs Σx et $\Sigma' x$ à la place de y et y', on aura deux équations qui par l'élimination de x en donneront une en a et b, que je représente par

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Si maintenant on substitue dans cette équation à la place de a et b leurs premières valeurs en fonctions de x, y, y', on aura l'équation dérivée dont $y = \Sigma x$ sera l'équation primitive singulière ; et dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

sera l'équation primitive ordinaire, les constantes a et b étant l'une fonction de l'autre déterminée par l'équation $\Phi(a, b) = 0$.

Prenons par exemple l'équation

$$y^2 - ax^2 - b = 0,$$

son équation prime sera

$$y y' - a x = 0;$$

et l'on tire de ces deux équations

$$a = \frac{y y'}{x} \quad b = y^2 - x y y'.$$

Supposons maintenant que l'on ait l'équation primitive singulière

$$y - A x - B = 0,$$

elle donne

$$y = A x + B,$$

donc

donc

$$y^2 = A^2 x^2 + 2AB x + B^2$$

et

$$y y' = A^2 x + AB;$$

de sorte que, par ces substitutions, les valeurs de a et b deviendront

$$a = A^2 + \frac{AB}{x}, \quad b = AB x + B^2,$$

d'où l'on tire, en éliminant x, cette équation en a et b

$$(a - A^2)(b - B^2) - A^2 B^2 = 0$$

savoir

$$ab - B^2 a - A^2 b = 0.$$

Donc substituant ici les valeurs générales de a et b en x, y, y', on aura l'équation du premier ordre

$$\frac{y y'}{x}(y^2 - x y y') - B^2 \frac{y y'}{a} - A^2 (y^2 - x y y') = 0$$

dont

$$y - Ax - B = 0$$

sera l'équation primitive singulière.

Son équation primitive sera

$$y^2 - a x^2 - b = 0$$

en supposant entre a et b l'équation ci-dessus

$$ab - B^2 a - A^2 b = 0;$$

de sorte que comme cette équation donne

$$b = \frac{B^2 a}{a - A^2},$$

l'équation primitive sera

$$y^2 - a x^2 - \frac{B^2 a}{a - A^2} = 0$$

a étant la constante arbitraire.

En effet, si on cherche l'équation primitive singulière d'après celle-ci, on aura, en prenant les fonctions dérivées par rapport à a

$$- x^2 + \frac{B^2 A^2}{(a - A^2)^2} = 0$$

d'où l'on tire

$$a = A^2 \pm \frac{B A}{x}.$$

Substituant cette valeur dans la même équation, on aura

$$y^2 - A^2 x^2 \mp A B x - B^2 = 0$$

ce qui donne

$$y = \pm A x \pm B$$

où les signes ambigus sont à volonté.

En général il est facile de voir qu'on aura le même résultat $\Phi (a, b) = 0$, en substituant d'abord dans l'équation supposée

$$F (x, y, a, b) = 0$$

la valeur donnée $y = \Sigma\, x$, et éliminant ensuite a par le moyen de son équation prime relative à a.

Or si l'équation

$$\Phi(a, b) = 0 \quad \text{donne} \quad b = \Psi\, a,$$

et qu'on substitue cette valeur à la place de b, il s'ensuivra que l'équation

$$F(x, \Sigma\, x, a, \Psi\, a) = 0$$

aura lieu en même tems que son équation prime relative à x. Mais a étant alors une fonction de x l'équation prime relative à x et a doit avoir lieu ; donc la partie relative à a aura lieu aussi en particulier ; ce qui est le caractère de l'équation primitive singulière.

Ainsi ayant pris une équation primitive quelconque en x, y, a et b, il n'y aura qu'à éliminer y au moyen de l'équation primitive singulière donnée, ensuite éliminer x par celle-ci et par son équation prime relative à x, on aura sur le champ une équation en a et b, qui sera l'équation de condition

$$\Phi(a, b) = 0,$$

par laquelle il faudra déterminer l'une des deux constantes a et b par l'autre. Ensuite on pourra, d'après la même équation primitive, chercher si l'on veut l'équation dérivée, par l'élimination de la constante arbitraire.

Ainsi dans l'exemple précédent en substituant $Ax + B$ pour y dans l'équation

$$y^2 - a x^2 - b = 0$$

ou a

$$(A^2 - a)x^2 + 2ABx + B^2 - b = 0$$

dont l'équation prime est

$$(A^2 - a)x + AB = 0,$$

celle-ci donne

$$x = -\frac{AB}{A^2 - a},$$

et cette valeur substituée dans la première donne sur le champ l'équation de condition

$$(A^2 - a)(B^2 - b) - A^2B^2 = 0$$

comme plus haut.

En prenant d'autres équations en x, y, a et b, et opérant de la même manière, on trouvera autant d'équations du premier ordre qu'on voudra, dont la même équation

$$y - Ax - B = 0$$

sera l'équation primitive singulière.

On voit aussi que la même équation en x, y, a et b pourra donner telle équation primitive singulière qu'on voudra, suivant la relation qu'on établira entre les constantes a et b.

Enfin on voit que par ce problême on peut toujours trouver la relation entre deux constantes quelconques a, b d'une équation donnée en x, y, a et b, pour que cette équation soit l'équation primitive ordinaire et complette, répondant à une équation primitive singulière donnée.

On peut appliquer la même méthode à la recherche des équations du second ordre ou des ordres supérieurs dont l'équation primitive singulière sera donnée.

Supposons que cette équation soit du premier ordre et representée par

$$y' + f(x, y) = 0$$

On prendra une équation quelconque en x, y et trois constantes arbitraires a, b, c.

On tirera de cette équation et de ses équations, prime et seconde, les valeurs de a, b, c en fonctions de x, y, y' et y''.

On substituera dans ces fonctions les valeurs de y', et y'' en x et y tirées de l'équation primitive donnée, c'est-à-dire $-f(x, y)$ à la place de y' et

$$-f'(x) + f'(y) \times f(x, y)$$

à la place de y'' ; l'on aura a, b, c exprimées en fonctions de x et y, ce qui donnera trois équations, d'où éliminant x et y, il résultera une équation en a, b, c que je représenterai par

$$\Phi(a, b, c) = 0.$$

Cette équation en y substituant les premières valeurs de a, b, c, en fonctions de x, y, y', y'' sera l'équation du second ordre, dont la proposée $y' + f(x, y) = 0$ sera l'équation primitive singulière, et l'equation en x, y, a, b c en sera l'équation primi-

tive en x et y, en supposant entre elles trois constantes a, b, c la relation donnée par l'équation

$$\Phi\ (a,\ b,\ c = 0.$$

Si l'équation singulière donnée était du second ordre, on prendrait une équation en x, y et quatre constantes a, b, c, etc, et ainsi de suite.

Supposons que l'équation primitive singulière soit $y' = A\,y$, et prenons l'équation

$$y' - \frac{a}{2}\,x^2 + b\,x - c = 0$$

d'où l'on tire les deux dérivées, prime et seconde

$$y' - a\,x - b = 0 \quad \text{et} \quad y'' - a = 0\ ;$$

ces trois équations donnent

$$a = y'',\ b = y' - x\,y'',\ c = y - x\,y' + \frac{x^2}{2}\,y.$$

Mais la proposée donne

$$y' = A\,y,\ y'' = A\,y' = A^2\,y\ ;$$

donc substituant ces valeurs on aura

$$a = A^2 y,\ b = A\,y\,(1 - A\,x),$$
$$c = y\,(1 - A\,x + \frac{A^2}{2}\,x^2).$$

Eliminant x et y on trouve l'équation

$$a^2 + A^2\,(b^2 - 2\,a\,c) = 0$$

dans laquelle en substituant les premières valeurs de a, b, c il vient l'équation du second ordre

$$y''^2 - 2\,A^2\,y\,y'' + A^2\,y'^2 = 0$$

dont la proposée $y' = A y$, sera l'équation primitive singulière et l'équation supposée

$$y - \frac{2}{2} x^2 - b x - c = 0$$

sera l'équation primitive en x et y, en supposant l'équation

$$a^2 + A^2 (b^2 - 2 a c) = 0 ;$$

de sorte que comme cette équation donne

$$c = \frac{a^2 + A^2 b^2}{2 a} ,$$

on aura

$$y - \frac{a}{2} x^2 - b x - \frac{a^2 + A^2 b^2}{2 a} = 0$$

a, et b étant les deux constantes arbitraires.

Les équations de la forme $\Phi (a, b, c) = 0$ que nous venons de considerer, dans les quelles les quantités a, b, c etc, sont les valeurs en x, y, y' etc, des constantes a, b, c etc, tirées d'une équation primitive

$$F (x, y, a, b, c \ldots) = 0$$

et de ses dérivées

$$F'(x, y) = 0 , F''(x, y) = 0 \text{ etc} ,$$

constituent une classe remarquable d'équations dérivées, qui ont toujours une équation primitive singulière, parce que la dérivée d'une equation de cette classe a nécessairement un facteur du même ordre que la même équation.

Pour le démontrer, soit d'abord

$$F(x, y, a, b) = 0$$

une équation quelconque en x, y et deux constantes a, et b.

En regardant ces constantes comme arbitraires, l'équation dont il s'agit sera l'équation primitive d'une équation du second ordre en x, y, y' et y'' qui résultera de l'élimination de a et b au moyen des deux équations dérivées

$$F'(x, y) = 0, F''(x, y) = 0;$$

et cette équation pourra toujours, comme nous l'avons vu, se mettre sous la forme

$$y'' + f(x, y, y') = 0.$$

Maintenant si on commence par tirer les valeurs de a et b des deux équations

$$F(x, y, a, b) = 0 \quad \text{et} \quad F'(x, y) = 0,$$

et que ces valeurs soient représentées par les fonctions

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y'),$$

il est clair que les deux équations

$$a = \varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad b = \psi(x, y, y')$$

où a et b sont des constantes arbitraires, seront les deux équations primitives du premier ordre de l'équation précédente

$$y'' + f(x, y, y') = 0;$$

par

par conséquent leurs dérivées

$$\varphi'(x, y, y') = 0 \quad \text{et} \quad \psi'(x, y, y') = 0$$

devront coïncider avec cette même équation en donnant la même valeur de y'' en x, y et y'.

Or $\varphi'(x, y, y') = \varphi'(x, y) + y'' \varphi'(y')$

et $\psi'(x, x, y') = \psi'(x, y) + y'' \psi'(y')$

suivant la notation abrégée que nous avons adoptée ; donc on aura

$$y'' = -\frac{\varphi'(x, y)}{\varphi'(y')} = -\frac{\psi'(x, y)}{\psi'(y')}$$
$$= -f(x, y, y') ;$$

expression de y'' qui seront nécessairement identiques.

On aura donc

$$\varphi'(x, y) = \varphi'(y') \times f(x, y, y')$$
$$\psi'(x, y) = \psi'(y') \times f(x, y, y') ;$$

par conséquent, en substituant ces valeurs dans les expressions précédentes des fonctions dérivées

$$\varphi'(x, y, y') \qquad \psi'(x, y, y') ,$$

c'est-à-dire de a' et b', en regardant maintenant a et b comme fonctions de x, y, y', on aura

$$a' = \varphi'(y') \times \left(y'' + f(x, y, y')\right)$$
$$b' = \psi'(y') \times \left(y'' + f(x, y, y')\right)$$

Cela posé, soit

$$\Phi(a, b) = 0$$

une équation du premier ordre, sa dérivée sera

$$a'\Phi' a + b'\Phi'(b) = 0$$

et en substituant les valeurs de a', b', qu'on vient de trouver, elle deviendra

$$\left(\varphi'(y') \times \Phi'(a) + \psi'(y') \times \Phi'(b)\right) \times \left(y'' + f(x, y, y')\right) = 0.$$

Cette équation a, comme l'on voit, deux facteurs, l'un, qui n'est que du premier ordre comme l'équation proposée, l'autre qui contient y'' et qui donne proprement l'équation dérivée du second ordre.

Celui-ci donne l'équation

$$y'' + f(x, y, y') = 0$$

d'où il s'ensuit $a' = 0$, $b' = 0$ par les formules trouvées plus haut. Desorte que les fonctions a et b seront constantes.

Prenant donc a et b pour des constantes arbitraires, on aura ces deux équations primitives du premier ordre

$$\varphi(x, y, y') = a, \psi(x, y, y') = b,$$

d'où éliminant la fonction dérivée y', on aura une équation en x, y, a et b, qui sera l'équation primitive de la proposée, et qui sera évidemment la même que l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

d'où l'on avait déduit les fonctions

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y').$$

Mais il faudra que les constantes a et b de cette équation, satisfassent à la condition

$$\Phi(a, b) = 0$$

donnée par l'équation proposée ; ce qui les réduira à une seule, qui sera par conséquent la constante arbitraire de l'équation primitive de la proposée.

Le facteur du premier ordre

$$\varphi'(y') \times \Phi'(a) + \psi'(y') \times \Phi'(b)$$

donnera, de son côté, l'équation en x, y et y',

$$\varphi'(y') \times \Phi'(a) + \psi'(y') \times \Phi'(b) = 0$$

en supposant qu'on y mette pour a et b leurs valeurs

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y');$$

et cette équation, d'après la théorie exposée dans la leçon précédente, donnera sur le champ l'équation primitive singulière de la même équation proposée, en éliminant y' par le moyen de ces deux équations.

Or il est facile de voir que, si on représente par

$$\Psi(x, y, y') = 0$$

la fonction donnée $\Phi(a, b)$ dans laquelle

$$a = \varphi(x, y, y'), \quad \text{et} \quad b = \psi(x, y, y'),$$

ce facteur se réduira simplement à $\Psi'(y')$, puisque les expressions

$$\varphi'(y') \quad \text{et} \quad \psi'(y')$$

ne sont que les fonctions dérivées de a et b, prises par rapport à y' seule.

Ainsi on aura l'équation primitive singulière de la proposée

$$\Psi(x, y, y') = 0,$$

dans le cas où elle est réductible à la forme

$$\Phi(a, b) = 0,$$

en éliminant y' de cette équation au moyen de sa dérivée $\Psi'(y') = 0$, prise relativement à y' seule.

En appliquant les mêmes principes aux équations des ordres supérieurs, on prouvera que si l'on a une équation du second ordre, représentée par

$$\Psi(x, y, y', y'') = 0$$

dont le premier membre puisse être une fonction quelconque $\Phi(a, b, c)$ de trois fonctions a, b, c déterminées par une équation quelconque

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

entre x, y, a, b & c, et par ses deux équations dérivées

$$F'(x, y) = 0, \quad F''(x, y) = 0,$$

prises en regardant a, b, c comme constantes, l'équation proposée aura nécessairement une équation primitive singulière du premier ordre, résultante de l'élimination de y'', au moyen de son équation dérivée $y'(y'') = 0$, relative à y''.

Et l'on aura l'équation primitive en x et y par l'é-

quation même

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

en prenant les constantes a, b, c de manière qu'elles satisfassent à l'équation donnée

$$\Phi(a, b, c) = 0;$$

de sorte qu'il en restera deux d'arbitraires.

Et ainsi pour les équations des ordres supérieurs.

Prenons l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

sa dérivée sera $x - a y' = 0$; de ces deux équations on tire

$$a = \frac{x}{y'}, \quad b = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2}$$

Si maintenant on prend pour l'équation

$$\Phi(a, b,) = 0$$

celle-ci $b =$ à une constante, on aura l'équation du premier ordre

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0$$

où b est une constante quelconque.

Ainsi on aura tout de suite l'équation primitive singulière, en éliminant y' au moyen de l'équation

dérivée, prise relativement à y', laquelle sera

$$\frac{2xy}{y'^2} + \frac{2x^2}{y'^3} = 0$$

d'où l'on tire $y' = -\frac{x}{y}$, et substituant cette valeur de y', on a

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

comme on l'a déjà trouvé par d'autres voies.

Prenons encore l'équation

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - c = 0$$

on aura les deux dérivées,

$$y' - ax - b = 0$$
$$y'' - a = 0$$

d'où l'on tire

$$a = y'', \; b = y' - xy'', \; c = y - xy' + \frac{x^2}{2}y''$$

Si donc on fait

$$\Phi(a, b, c) = c - b^2 - a^2,$$

on aura l'équation du second ordre

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0$$

dont l'équation primitive singulière, résultera de

l'élimination de y'' au moyen de son équation prime, relative à y'', savoir,

$$\frac{x^2}{2} + 2x(y' - xy'') - 2y'' = 0$$

ce qui revient à ce que nous avons déjà trouvé.

Lorsqu'on connaît l'équation primitive

$$F(x, y, a, b..) = 0$$

avec l'équation

$$\Phi(a, b \ldots) = 0$$

qui donne la relation entre les quantités a, b, c etc. on peut trouver directement l'équation primitive singulière, sans connaître les valeurs de ces quantités en fonctions de x, y, y' etc ; car ayant réduit les quantités a, b, etc, à une de moins par le moyen de l'équation de condition

$$\Phi(a, b \ldots) = 0,$$

il n'y aura qu'à appliquer à l'équation primitive

$$F(x, y, a, b, \ldots) = 0$$

la méthode générale, exposée dans la leçon XV.

Mais la difficulté est de reconnaître *a posteriori* si des fonctions données dont une équation proposée est composée, dépendent d'une même équation primitive, de manière qu'elles puissent représenter les valeurs des constantes, tirées de cette équation et de ses dérivées.

Pour la résoudre, j'observe que la propriété caractéristique de ces sortes de fonctions est que leurs dérivées ont entr'elles des rapports exprimés par des fonctions du même ordre que les fonctions dont il s'agit; en effet par rapport aux fonctions du premier ordre, nous avons déjà vu plus haut que les fonctions

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y')$$

qui représentent les valeurs des constantes a, et b tirées de l'équation générale

$$F(x, y, a, b) = 0$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

sont telles que leurs dérivées

$$\varphi'(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi'(x, y, y')$$

que nous avons désignées par a' et b' ont la forme suivante

$$\varphi'(x, y, y') = \varphi'(y') \times \left(y'' + f(x, y', y'')\right)$$

$$\psi'(x, y, y') = \psi'(y) \times \left(y'' + f(x, y, y')\right)$$

de sorte que l'on a simplement

$$\frac{\varphi'(x, y, y')}{\psi'(x, y, y')} = \frac{\varphi'(y')}{\psi'(y')},$$

où l'on voit que les fonctions dont il s'agit, ont la propriété que la fonction seconde y'' disparaît du rapport de leurs dérivées, et que ce rapport est

le

le même que si on prenait ces dérivées relativement à la variable y' seule.

Soit, par exemple, l'équation à la ligne droite

$$y + ax + b = 0$$

sa dérivée sera $y' + x = 0$; ainsi on aura

$$a = -y' \quad \text{et} \quad b = xy' - y$$

on aura donc, en désignant simplement par φ et ψ ces expressions de a et b

$$\varphi = -y', \quad \psi = xy' - y;$$

prénant les fonctions dérivées, il viendra

$$\varphi' = -y'', \quad \psi' = xy'';$$

donc $\frac{\varphi'}{\psi'} = -\frac{1}{x}$. Si on ne prenait φ' et ψ' que relativement à y' on aurait

$$\varphi' = -1, \quad \psi' = x, \quad \text{et} \quad \frac{\varphi'}{\psi'} = -\frac{1}{x}$$

comme précédemment.

Soit encore l'équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

qui est à un cercle dont le rayon $= b$, et dont le centre est dans l'axe des abscisses à la distance a de leur origine..

La dérivée sera $yy' + x - a = 0$ d'où l'on tire $a = x + yy' = \varphi$; delà on aura par les substitutions

$$b = y\sqrt{(1 + y'^2)} = \psi$$

Si maintenant on prend les dérivées de φ et ψ, on aura

$$\varphi' = 1 + y'^2 + y\,y'' \,,\quad \psi' = y'\sqrt{(1+y'^2)} + \frac{y\,y'\,y''}{\sqrt{(1+y'^2)}}$$

et de-là $$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{y'} = \frac{\psi}{\varphi - x}$$

Si on ne prenait les dérivées φ' et ψ' que relativement à y', on aurait

$$\varphi' = y,\ \psi' = \frac{y\,y'}{\sqrt{(1+y'^2)}}$$

donc $$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\sqrt{(1+y'^2)}}{y'},$$

comme ci-dessus.

On pourrait prouver, par une analise semblable, que les fonctions de x, y, y' et y'', qui expriment les valeurs des quantités a, b, c tirées d'une équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

et de ses deux dérivées

$$F'(x, y) = 0 \quad F''(x, y) = 0$$

dans lesquelles ces quantités sont traitées comme constantes, ont des dérivées dont les rapports sont indépendans de la fonction tierce y''', et qui sont les mêmes que si on ne prenait ces dérivées que relativement à la fonction seconde y'' ; parce qu'en dési-

guant ces fonctions par

$$\varphi(x, y, y', y'') , \psi(x, y, y', y''),$$

$$\text{et } \xi(x, y, y', y''),$$

les trois équations

$$\varphi(x, y, y', y'') = a.$$

$$\psi(x, y, y', y'') = b;$$

$$\xi(x, y, y', y'') = c,$$

où a, b, c seraient des constantes arbitraires, seront les trois primitives d'une même équation du troisième ordre, telle que

$$y''' + f(x, y, y', y'') = 0$$

à laquelle les dérivées de ces équations devront par conséquent satisfaire. Et ainsi pour les fonctions du même genre des ordres supérieurs.

Mais on peut s'en convaincre encore d'une manière plus directe, que voici:

En dénotant simplement par φ et ψ les fonctions

$$\varphi(x, y, y'), \psi(x, y, y')$$

qui expriment les valeurs des constantes a et b tirées de l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y) = 0$$

il est clair que l'équation

$$F(x, y, \varphi, \psi) = 0$$

sera identique ; que par conséquent sa dérivée

$$F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) + \psi' F'(\psi) = 0$$

aura lieu d'elle-même ; mais on a déjà

$$F'(x, y) = 0$$

donc on aura séparément l'équation

$$\varphi' F'(\varphi) + \psi F'(\psi) = 0$$

laquelle donne

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = - \frac{F'(\psi)}{F'(\varphi)}$$

Or comme ψ et φ ne contiennent que x, y, et y' il est visible que la valeur de $\frac{\varphi'}{\psi'}$ ne sera qu'une fonction du premier ordre.

Ainsi, dans le dernier exemple où

$$F(x, y, a, b) = y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2,$$

si on change a en φ et b en ψ on aura

$$F(x, y, \varphi, \psi) = y^2 + x^2 - 2x\varphi + \varphi^2 - \psi^2,$$

donc

$$F'(\varphi) = 2(\varphi - x), \quad F'(\psi) = -2\psi$$

donc $\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\varphi}{x - \psi}$ comme nous l'avons trouvé par une autre voie.

De même si φ ψ ξ sont les fonctions de x, y, y' et y'' qui expriment les valeurs des constantes a, b, c tirées de l'équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0,$$

et de ses deux dérivées

$$F'(x, y) = 0 \quad F''(x, y) = 0,$$

en substituant ces fonctions à la place de a, b, c on aura des équations identiques dont par conséquent les dérivées auront lieu aussi.

On aura donc, en premier lieu,

$$F(x, y, \varphi, \psi, \xi) = 0,$$

et par conséquent, sa dérivée

$$F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) + \psi' F'(\psi) + \xi' F'(\xi) = 0$$

mais on a déjà

$$F'(x, y) = 0$$

donc on aura l'équation

$$\varphi' F'(\varphi) + \psi' F'(\psi) + \xi' F'(\xi) = 0.$$

Ensuite comme l'équation

$$F'(x, y) = 0$$

contient outre les quantités x, y, y' les trois fonctions φ ψ, ξ, si on la dénote par

$$f(x, y, y', \varphi, \psi, \xi) = 0,$$

on aura aussi l'équation identique

$$f(x, y, y', \varphi, \psi, \xi) = 0$$

et par conséquent la dérivée

$$f(x, y, y') + \varphi' f'(\varphi) + \psi' f'(\psi) + \xi' f'(\xi) = 0,$$

mais on a déjà $f'(x, y, y') = 0$ puisqu'il est visible que $f'(x, y, y')$ est la même chose que $F''(x, y)$; donc on aura aussi l'équation

$$\varphi' f'(\varphi) + \psi' f'(\psi) + \xi' f'(\xi) = 0.$$

Si on combine cette équation avec la précédente, il est clair, que puisque les quantités φ', ψ', ξ' n'y sont qu'à la première dimension, et en multiplient tous les termes, il est clair, dis-je, qu'on en tirera les valeurs de $\frac{\varphi'}{\psi'}$ et de $\frac{\varphi'}{\xi'}$ en fonctions des quantités x, y, y', φ, ψ et ξ; de sorte que ces fonctions ne passeront pas le second ordre.

Et ainsi de suite.

Si les fonctions φ et ψ exprimaient les valeurs des constantes a et b tirées de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, y', a, b) = 0$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y, y') = 0,$$

ces fonctions seraient alors du second ordre, et on trouverait par le même raisonnement que le rapport $\frac{\varphi'}{\psi'}$ de leurs dérivées, serait exprimé également par

$\frac{F'(\psi)}{F'(\varphi)}$; de sorte que ce rapport serait une fonction du second ordre et par conséquent du même ordre que les fonctions φ et ψ.

En général il résulte de l'analyse précédente que si ξ. ψ. ξ, etc, sont des fonctions d'un ordre quelconque qui expriment les valeurs des constantes a, b, c, etc., tirées d'une équation en x, y, y', y'' etc., a, b, c, etc.; et de ses dérivées successives; les dérivées de ses fonctions auront toujours entr'elles des rapports du même ordre que les fonctions elles-mêmes.

Je dis maintenant que si des fonctions quelconques de x, y, y', y'', etc, sont telles que leurs dérivées aient entr'elles des rapports du même ordre que les fonctions elles-mêmes, c'est-à-dire, où il n'entre que des fonctions dérivées de y du même ordre; ces fonctions pourront toujours exprimer les valeurs d'autant de constantes tirées d'une équation primitive et de ses dérivées successives; et il sera alors facile de retrouver cette équation primitive génératrice.

Car si on désigne par φ, ψ, ξ, etc., les fonctions dont il s'agit, et que M, N, etc, soient les valeurs des rapports des dérivées ψ', ξ', etc ; $a\varphi'$, ces valeurs étant, par l'hypothèse, des fonctions du même ordre que les fonctions données φ, ψ ξ, etc, on aura donc les équations

$$\psi' = M\varphi', \xi' = N\varphi' \text{ etc.}$$

Supposons $\varphi' = 0$, on aura donc aussi

$\psi' = 0$. $\xi' = 0$; donc $\varphi = a$, $\psi = b$; $\xi = c$ etc,

a, b, c etc, étant des constantes.

Ces équations seront donc des équations primitives différentes de la même équation $\varphi' = 0$, puisqu'elles ont lieu en même tems qu'elle : par conséquent, en éliminant de ces mêmes équations, $\varphi = a$, $\psi = b$, $\xi = c$, etc. les plus hautes fonctions dérivées de la variable y, on aura une équation primitive d'un ordre inférieur, qui contiendra les constantes a, b, c, etc, et qui sera l'équation primitive, génératrice de la forme

$$F(x, y, y', y'' \ldots a, b, c \ldots) = 0$$

d'où résultent les fonctions φ, ψ ξ etc ; en les prenant pour les valeurs des constantes a, b, c, etc; tirées de cette équation et de ses dérivées successives

$$F'(x, y, y', y'' \ldots) = 0 \quad F'', x, y, y', y'' \ldots \varphi' = 0 \text{ etc.}$$

Ainsi, si l'on avait entre ces fonctions une équation quelconque

$$\Phi(\varphi\ \psi, \xi \ldots) = 0,$$

et que l'on reconnût que leurs dérivées φ', ψ', ξ' etc, ont entr'elles des rapports du même ordre que ces fonctions, on aurait tout de suite les équations primi-

tives

tives $\phi = a$, $\psi = b$, $\chi = c$ etc, et de-là l'équation primitive principale

$$F(x, y, y', y'' \ldots a, b, c \text{ etc},) = 0,$$

dans laquelle les constantes a, b, c, etc, seraient arbitraires hors une qui devrait être déterminée par l'équation donnée, laquelle se réduit alors à

$$\Phi(a, b, c \ldots) = 0$$

On aurait ensuite l'équation primitive singulière par les méthodes exposées plus haut.

Par exemple s'il étoit proposé l'équation du premier ordre

$$\Phi.\left(x + y y', y\sqrt{(1 + y'^2)}\right) = 0$$

sans qu'on sût que les deux quantités qui sont sous la fonction, peuvent exprimer les constantes tirées d'une équation primitive et de sa dérivée, on examinerait d'abord leurs dérivées qui sont $1 + y'^2 + y y''$

et $y'\sqrt{(1 + y'^2)} + \dfrac{y y' y''}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$

comme celle-ci se réduit à $\dfrac{y' + y'^3 + y y' y''}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$ on voit d'abord que son rapport à la première sera exprimé simplement par $\dfrac{y'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$ sansque la fonc-

tion seconde y'' puisse y entrer. On est donc assuré par-là que les deux fonctions

$$x + y y' \quad \text{et} \quad y\sqrt{(1 + y'^2)}$$

peuvent provenir d'une équation primitive qu'on trouvera en faisant les deux équations

$$x + y y' = a, \quad y\sqrt{(1 + y'^2)} = b,$$

et éliminant y', ce qui donne celle-ci

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2$$

laquelle coïncide avec celle d'où nous avions déduit les expressions de a et b dans le dernier exemple.

Maintenant l'équation proposée deviendra simplement $\Phi(a, b) = 0$ par laquelle on déterminera b en a ; de sorte que l'équation précédente ne contiendra plus que la constante arbitraire a, et sera alors la primitive complette de la proposée.

On pourra tirer delà, la primitive singulière en éliminant a au moyen de la dérivée prise par rapport à a seul, suivant la méthode de la leçon XV, ou bien il n'y aura qu'à éliminer y' de la proposée au moyen de sa dérivée prise par rapport à y' seule, comme nous l'avons vu plus haut relativement aux équations de ce genre.

LEÇON DIX-HUITIÈME.

Sur différens problèmes relatifs à la théorie des équations primitives singulières.

Presque dès la naissance du calcul différentiel, il s'est présenté aux géomètres des problèmes, qui dépendent de cette théorie et qu'ils ont résolu par des artifices particuliers

Leibnitz dans une mémoire intitulé *Nova calculi differentialis applicatio* et, inséré dans les actes de Leipsic de 1694, (voyez le n°. LXI des œuvres de Jacques Bernoulli) donne la manière de trouver la courbe, formée par l'intersection continuelle d'une infinité de courbes renfermées dans une même équation, en faisant varier dans cette équation le paramètre qui les différentie; ce qui donne une nouvelle équation par laquelle on aura une valeur du paramètre en fonction des co-ordonnées, laquelle étant substituée dans cette équation, donne tout de suite une équation finie pour la courbe cherchée.

Il applique ensuite cette méthode à une question qu'on regardait alors comme très-difficile, et qui consiste à trouver la courbe, dont les normales ou perpendiculaires ont une relation donnée avec les parties de l'axe, interceptées entre l'origine des abscisses et les normales.

Leibnitz considère cette courbe comme formée par l'intersection continuelle d'une infinité de cercles qui ont leurs centres sur l'axe; alors les rayons des cercles deviennent les normales à la courbe, et la relation donnée par le problême, entre les normales et les parties correspondantes de l'axe, a lieu entre les rayons et les abscisses, qui répondent aux centres des cercles.

Nommant x, y les cordonnées du cercle, a l'abscisse qui répond au centre, et b le rayon, on aura

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2$$

savoir

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0.$$

pour l'équation du cercle.

Maintenant l'équation proposée entre b et a, donnera b en fonction de a; il ne restera ainsi que le paramètre a, qu'on déterminera, comme on vient de le dire; et l'équation en x et y deviendra alors celle de la courbe formée par l'intersection de tous les cercles, et aura par conséquent la propriété demandée.

Supposant avec Leibnitz que l'équation entre a et b soit celle de la parabole $b^2 = ak$, k étant une constante, l'équation en x, y et a, sera

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - ak = 0.$$

Faisant varier a seul, suivant la notation du calcul différentiel on a $(-2x + 2a - k)\,da = 0$

d'où l'on tire $a = \frac{k + 2x}{2}$; substituant cette valeur dans l'équation précédente, on a après les réductions.

$$y^2 - kx - \frac{k^2}{4} = 0$$

pour la courbe cherchée, qu'on voit être aussi une parabole.

On peut s'assurer *a posteriori* que cette courbe résout le problême.

En effet on sait que y étant l'ordonnée qu'on regarde comme fonction de l'abscisse x, la fonction primé y' exprime le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente, lequel est le même que celui de la sous-normale à l'ordonnée, de sorte que yy' est l'expression de la sousnormale; par conséquent $y\sqrt{(1+y'^2)}$ sera celle de la normale, et $x + yy'$ celle de la partie de l'axe entre l'origine et la normale. (Voyez la seconde partie de la *Théorie des fonctions analitiques.*)

Or l'équation, qu'on vient de trouver, donne $y^2 = kx + \frac{k^2}{4}$ et prenant la dérivée $2yy' = k$; donc la normale sera

$$\sqrt{(kx + \frac{k^2}{2})}$$

et la partie de l'axe sera $x + \frac{k}{2}$, laquelle étant

multipliée par k, devient comme l'on voit égale au carré de la normale.

Le problême est donc résolu de cette manière; cependant on doit être surpris que Leibnitz n'ait pas remarqué que sa solution n'admet point de constante arbitraire dans l'équation de la courbe, tandis qu'il est évident que le problême conduit naturellement à une équation différentielle, dont l'intégrale ne peut être complette que par l'introduction d'une constante arbitraire.

En effet, nommant a la partie de l'axe qui répond à la normale, et b la normale, on a, comme on vient de le voir, les expressions

$$a = x + y y', \; b = y \sqrt{(1 + y'^2)};$$

donc si on veut que $b = \mathrm{F}\, a$, on aura l'équation dérivée

$$y \sqrt{(1 + y'^2)} = \mathrm{F}(x + y y')$$

dont il faudra chercher l'équation primitive.

Suivant la notation du calcul différentiel, on aurait à intégrer l'équation différentielle

$$y \sqrt{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)} = \mathrm{F}\left(x + \frac{y\,d\,y}{d\,x}\right).$$

Dans l'exemple proposé on a $b^2 = a\,\mathrm{k}$, par conséquent $\mathrm{F}\,a = \sqrt{(a\,\mathrm{k})}$, et l'équation dérivée devient

$$y \sqrt{(1 + y'^2)} = \sqrt{(x + y y')}\,\mathrm{k}.$$

Si on tire de cette équation la valeur de $y\,y'$ on a

$$y\,y' = \frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k^2}{4} + k\,x - y^2\right)}.$$

ou bien

$$k - 2\,y\,y' + 2\sqrt{\left(\frac{k}{4} + k\,x - y^2\right)} = 0$$

divisons toute l'équation par

$$2\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} + k\,x - y^2\right)}$$

on aura

$$\frac{k - 2\,y\,y'}{2\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} + k\,x - y^2\right)}} + 1 = 0$$

équation dont la primitive est visiblement

$$\sqrt{\left(\frac{k^2}{4} + k\,x - y^2\right)} + x = h,$$

h étant une constante arbitraire.

Cette équation devient, en faisant disparaître le radical,

$$\frac{k^2}{4} + k\,x - y^2 = (h - x)^2$$

équation au cercle.

Si on fait $h = a - \frac{k}{2}$, a étant la constante arbitraire, l'équation devient

$$y^2 + x^2 - 2\,a\,x + a^2 - a\,k = 0.$$

Cette équation, est comme l'on voit, la même que l'équation au cercle, dont Leibnitz a tiré sa solution par la variation de a ; ainsi on peut dire que l'équation au cercle, dans laquelle a, abscisse qui répond au centre, est la constante arbitraire et dont le rayon est $\sqrt{a\,k}$, est l'équation primitive qui resout le problême dans toute sa généralité ; il est évident, en effet, que tout cercle, dont le centre sera sur l'axe, et dont le rayon aura, avec la distance du centre à l'origine des abscisses, la relation qu'on suppose entre la normale et la partie de l'axe correspondante, satisfera à la question.

L'équation à la parabole trouvée par Leibnitz ne peut donc être qu'une équation primitive singulière ; en effet, en prenant dans la même équation au cercle, les fonctions dérivées relativement à la constante arbitraire a comme on l'a enseigné au commencement de la leçon XV, on a l'équation

$$-2x+2a-k=0$$

laquelle donne $a=\dfrac{k+2x}{4}$, valeur qui étant substituée dans l'équation au cercle, donne

$$y^2-kx-\frac{k^2}{4}=0$$

comme Leibnitz l'a trouvé ; d'où l'on doit conclure que la solution de Leibnitz n'est donnée que par l'équation primitive singulière.

On a vu que Leibnitz avait déduit cette solution de

de la considération de la courbe formée par l'intersection continuelle de tous les cercles que l'on aurait en faisant varier continuellement la constante a; c'est en effet une propriété générale des équations primitives singulières d'appartenir aux courbes formées par l'intersection continuelle des courbes représentées par l'équation primitive complette, en faisant varier continuellement la constante arbitraire qui différentie toutes ces courbes.

Comme cette propriété est pour ainsi dire la caractéristique de cette espèce d'équations primitives, il est intéressant d'en avoir une démonstration.

Pour cela, on remarquera que la courbe formée par l'intersection continuelle d'une série de courbes infiniment peu différentes l'une de l'autre, n'est autre chose que la courbe qui embrasserait ou toucherait toutes ces courbes, et qui aurait par conséquent, dans chacun de ses points, une tangente commune avec une de ces mêmes courbes.

Or soit $F(x, y, a) = 0$ l'équation générale des courbes dont il s'agit, a étant le paramètre qui est constant dans chacune d'elles, mais qui varie de l'une à l'autre; comme la courbe qui doit les embrasser à un point commun avec chacune de ses courbes, elle aura aussi les mêmes coordonnées x, y, et la même équation entre ces coordonnées, mais avec cette différence que le paramètre a sera variable dans l'équation

$$F(x, y, a) = 0$$

tant qu'elle appartiendra à la courbe qui embrasse toutes les autres.

De plus, il faudra que la position de la tangente soit la même dans la courbe, où a est constant, et dans celle où a est variable.

Or on sait que cette position ne dépend que de la fonction prime y', puisque $\frac{y}{y'}$ est l'expression de la soutangente ; donc il faudra que la valeur de y' tirée de la dérivée de l'équation

$$F(x, y, a) = 0$$

soit la même, soit qu'on y regarde a comme constante, soit qu'on la regarde comme une variable fonction de x ; ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la partie de la fonction dérivée relative à a ne soit nulle.

Cette partie, est suivant la notation adoptée, $a' F'(a)$; donc on aura l'équation $F'(a) = 0$ laquelle servira à déterminer a, en x et y. Or cette équation est, comme l'on voit, la même que celle qui donne l'équation primitive singulière, lorsque

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive ordinaire, dans laquelle a est la constante arbitraire, comme nous l'avons vu dans la leçon citée.

Donc l'identité de l'équation primitive singulière,

et de l'équation de la courbe qui embrasse toutes celles qui sont comprises dans l'équation primitive ordinaire, est démontrée, et résulte des principes mêmes de la chose.

Cette considération géomètrique est très importantes pour la théorie des équations primitives singulières; elle sert à lier entr'elles les courbes représentées par l'équation primitive ordinaire, et par l'équation primitive singulière, comme le principe analitique qui sert de base à cette théorie, sert à lier entr'elles ces mêmes équations, par la variation de la constante arbitraire.

Ainsi le problême analitique que nous avons résolu, au commencement de la leçon précédente, se réduit à trouver des courbes qui ayant un paramètre variable, puissent former par leur intersection mutuelle une courbe donnée.

On peut donc présenter ce problême ainsi :

Ayant deux courbes dont les équations, soient données, et dont l'une contienne deux constantes arbitraires, trouver la relation nécessaire entre ces deux constantes, pour qu'en faisant varier celle qui demeure arbitraire, on ait une infinité de courbes du même genre, qui par leur intersection continuelle forment toujours l'autre courbe donnée.

Pour le résoudre, il n'y aura qu'à chercher par les méthodes exposées dans la leçon précédente, la

pas remarqué que ce problême appartient essentiellement à la méthode inverse des tangentes, et que, par conséquent, la solution générale dépend d'une intégration qui doit nécessairement introduire une constante arbitraire dans l'équation entre x et y; et cela est même d'autant plus étonnant, qu'il avait donné auparavant, dans les mêmes leçons, les expressions différentielles de la normale et de la sous-normale, et que le problême ne consiste qu'à établir, entre ces quantités, une relation donnée.

Ensuite il est clair, parce que nous avons vu plus haut, que la solution de Bernoulli dépend d'une équation intégrale ou primitive singulière; et pour le démontrer, par sa propre analise, il suffit de considérer qu'on aura directement l'équation en x et y en substituant la valeur de b en a donnée par le problême dans les deux équations

$$\frac{db}{da} = \frac{a-x}{b} \quad \text{et} \quad y^2 + (a-x)^2 = b^2,$$

et éliminant ensuite a.

Ainsi, en supposant $b = \sqrt{(k\,a)}$ ces deux équations deviennent

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{a}} = \frac{a-x}{\sqrt{(k\,a)}}, \quad y^2 + (a-x)^2 = k\,a;$$

la première donne

$$\frac{k}{2} = a - x \qquad \text{d'où l'on tire} \qquad a = x + \frac{k}{2},$$

ce qui étant substitué dans la seconde, on a

$$y^2 + \frac{k^2}{4} = kx + \frac{k}{2}$$

savoir

$$y^2 = k\,x + \frac{k^2}{4}$$

comme on l'a trouvé.

Or je remarque que l'équation différentielle

$$\frac{d\,b}{d\,a} = \frac{a - x}{v} .$$

ou bien $b\,d\,b = (a - x)\,d\,a$, n'est autre chose que la différentielle de l'autre équation

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2$$

en faisant varier seulement a et b.

Ainsi comme b est supposé fonction de a, la solution se réduit à faire varier a seul dans l'équation

$$y^2 + x^2 - 2\,a\,x + a^2 - b^2 = 0$$

et à éliminer ensuite a, au moyen de cette nouvelle équation, ce qui revient, comme l'on voit, au procédé de Leibnitz, puisque l'équation est la même que son équation au cercle; on voit aussi que ce procédé coincide avec celui qui donne l'équation primitive singuliere de l'équation dérivée ou différentielle, dont la même équation

$$y^2 + x^2 - 2\,a\,x + a^2 - b^2 = 0$$

seroit l'équation primitive, a étant la constante arbitraire.

On aura donc cette équation dérivée, en éliminant a de l'équation primitive par le moyen de sa dérivée

$$y y' + x - a = 0;$$

ou bien en déterminant a et b, par le moyen de ces deux équations, et substituant leurs valeurs dans celle qui renferme la relation, entre les quantités a et b, donnée par les conditions du problême.

Or ces équations donnent

$$a = x + y y'$$
$$b = y \sqrt{(1 + y'^2)}$$

expressions qu'on voit être les mêmes que nous avons trouvées plus haut pour la normale b, et pour la partie de l'axe a qui répond à cette normale; de sorte que si la relation entre ces deux quantités est représentée en général par

$$\Phi (a, b) = 0,$$

l'équation dérivée qui répond à la primitive

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

sera

$$\Phi (x + y y' \sqrt{y (1 + y'^2)}) = 0,$$

C'est l'équation générale du problême de Leibnitz et de Bernoulli, dont, ils ont trouvé l un et l'autre, par des methodes différentes, l'équation primitive singulière, sans se douter de l'espèce de contradiction que leurs solutions présentaient avec les principes mêmes du calcul différentiel.

Avant

Avant de quitter cette analyse, il est bon de montrer *a priori*, pourquoi les expressions des constantes a et b tirées de l'équation au cercle

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0,$$

et de sa dérivée $yy' + x - a = 0$ sont les mêmes que celles qu'on trouve pour la normale et pour la partie correspondante de l'axe dans une courbe quelconque rapportée aux co-ordonnées x, y.

Si l'on conçoit un cercle qui touche une courbe dans un point, il est clair que son rayon dans ce point deviendra la normale à la courbe. Or l'équation dont il s'agit, est comme nous l'avons déjà vu, celle d'un cercle dont le centre est dans l'axe et répond à l'abscisse a, et dont le rayon est b; et pour que le cercle touche une courbe donnée, il faut premièrement qu'il ait un point commun avec elle, dans lequel par conséquent les co-ordonnées x, y seront les mêmes; il faut ensuite que la valeur de y' soit aussi la même dans le cercle et dans la courbe, comme nous l'avons démontré rigoureusement dans la seconde partie de la Théorie des fonctions analitiques; ainsi pour que b devienne la normale à la courbe, et que a soit la partie de l'axe qui y répond, il faudra que l'équation

$$y^2 + (x - a)^2 - b^2 = 0,$$

et sa dérivée prise en regardant a et b comme constantes, $yy' + x - a = 0$, aient lieu en même-tems, par rapport aux co-ordonnées x, y de la courbe; d'où l'on tire pour a et b, les valeurs données ci-dessus.

Les solutions de Leibnitz et de Jean Bernouilli offrent les premiers exemples des équations primitives singulières; mais Tailor est peut-être le premier qui ait trouvé directement une équation primitive singulière d'après l'équation dérivée.

Dans son ouvrage intitulé *methodus incrementorum*, qui a paru en 1715, Tailor étant parvenu (p. 17), pour la solution d'un problême à l'équation différentielle, (j'emploie ici pour plus de commodité la notation différentielle à la place de la notation fluxionnelle des anglais, ces deux notations exprimant la même chose dans le fond)

$$1 = y^2 - 2zy\,\frac{d^2y}{dz} + (1+z^2)\,\frac{dy^2}{dz^2}$$

dans laquelle y est fonction de z, il la différentie, et il obtient l'équation, où dz est constant

$$\left(-2zy + 2(1+z^2)\,\frac{dy}{dz}\right)\frac{d^2y}{dz} = 0$$

d'où il tire

$$d^2y = 0, \quad \text{ou} \quad zy - (1+z^2)\,\frac{dy}{dz} = 0.$$

Cette dernière équation donne $\frac{dy}{dz} = \frac{zy}{1+z^2}$,

ce qui réduit l'équation proposée à

$$1 = y^2 - \frac{2z^2y^2}{1+z^2} + \frac{z^2y^2}{1+z^2},$$

savoir $1 + z^2 = y^2$, *quæ est*, dit-il, *singularis quædam solutio problematis.*

En faisant $d^2 y = 0$ on a $y = a + bz$, donc $\frac{dy}{dz} = a$ et $y = a$ lorsque $z = 0$; mais dans ce cas la proposée donne

$$1 = a^2 + b^2 ; \quad \text{donc} \quad b = \sqrt{(1 - a^2)}$$

a étant la constante arbitraire.

Il est évident, parce que nous avons démontré dans les dernières leçons, que la solution, que Tailor nomme singulière, n'est autre chose qu'une équation primitive singulière de l'équation du premier ordre

$$1 = y^2 - 2zyy' + (1 + z^2)y'^2$$

dont $y = a + z\sqrt{(1 - a^2)}$ est l'équation primitive complette; car la dérivée de cette équation du premier ordre, étant, (en faisant $z' = 1$)

$$(-2zy + 2(1 + z^2)y')y'' = 0$$

le facteur du premier ordre $-2zy + 2(1 + z^2)y'$ donnera l'équation primitive singulière et l'autre facteur y'' donnera l'équation primitive complette comme nous l'avons montré dans la leçon XVI.

On peut aussi tirer la première de la seconde par les principes exposés dans la leçon XV; car l'équation primitive complette étant $y = a + z\sqrt{(1 - a^2)}$, sa dérivée relative à a sera $0 = 1 - \frac{za}{\sqrt{(1 - a^2)}}$,

éliminant a de ces deux équations, on a

$$1 + z^2 = y^2.$$

Long-tems après, en 1734, Clairaut en résolvant quelques problêmes sur des courbes, fut conduit à une équation différentielle, dont il obtint aussi deux intégrales différentes par le moyen de la différentiation. Il était parvenu à ces deux équations

$$(x - u)\,\Pi\, u = y - \Phi\, u, \text{ et } dy = \Pi\, u\, dx,$$

$\Pi\, u$ et $\Phi\, u$ étant des fonctions données d'une variable u qu'il s'agissait d'éliminer.

L'élimination étant impossible en général, il eut l'idée heureuse de différentier la première, et d'y substituer la valeur de dy tirée de la seconde; ce qui donne cette équation

$$(\Pi\, u - u\,\Pi'\, u - \Phi'\, u)\, du = 0 ;$$

d'où l'on tire deux valeurs de u, l'une donnée par l'équation

$$\Pi\, u - u\,\Pi'\, u - \Phi'\, u = 0$$

l'autre par l'équation $du = 0$ d'où l'on tire $u = a$, a étant une constante arbitraire.

Ces deux valeurs de u étant substituées dans la première équation

$$(x - u)\,\Pi\, u = y - \Phi\, u$$

donneront deux intégrales en x et y, l'une sans constante arbitraire, l'autre avec la constante arbitraire a et qui sera

$$(x - a)\,\Pi\, a = y - \Phi\, a,$$

laquelle ne donne, comme l'on voit, que des lignes droites.

Clairaut examine ensuite quelques cas particuliers du même problême, où il fait voir comment le calcul intégral, ne donne jamais que les lignes droites exprimées par l'équation générale

$$x \Pi a - a \Pi a = y - \Phi a,$$

et comment les équations trouvées par la première méthode échappent à l'intégration.

« J'ai été bien aise, dit-il, de montrer cette singularité de calcul, qui s'est présentée d'elle-même; on pourrait l'énoncer indépendamment du problême présent, de cette manière :

» Il y a des équations différentielles capables d'avoir deux solutions différentes l'une de l'autre, dont l'une (et même dans ce cas-ci la plus générale), n'a pas besoin du calcul intégral; telles sont » les équations

$$x\,dy\,dx - dy^2 = y\,dx^2 - dy\,dx$$

à laquelle

$4y = x^2 + 2x + 1$, et $2ax - 2x = -4y + 1 - a^2$.

» satisfont également; et

$a\,dy^2 + x\,dy^2 - y\,dy\,dx = x\,dx\,dy - y\,dx^2$

qui donne pour solutions

$$\frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \sqrt{4a}, \text{ et } b^2 y - 2bx + 2by = -4a.$$

En général $\frac{d\,\Phi\,(x,y)}{\Phi\,(x,y)} =$ à une fonction quelconque de x, y, dx, dy serait de cette nature ; intégrée, elle donnerait une équation, et sans aucune intégration, $\Phi\,(x,y) = 0$ serait l'autre. »

Voyez les mémoires de l Académie des Sciences pour 1734; pag. 213.

En rapprochant ces différentes solutions de notre Théorie, il est évident que celles qui ne renferment point de constante arbitraire, ne sont que des équations primitives singulières, et que les autres qui contiennent une constante arbitraire sont les équations primitives complettes ; mais Clairaut a tort de régarder ces dernières comme moins générales, parce qu'elles ne représentent que des lignes droites.

A l'égard de l'équation différentielle

$$\frac{d.\,(\Phi x\,.\,y)}{\Phi\,(x,y)} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) ds;$$

on ne peut pas dire en général avec Clairaut que l'équation finie $\Phi\,(x,y) = 0$, est de la même nature que les intégrales qu'il avait trouvées auparavant sans constante arbitraire ; car cette intégrale peut être une équation primitive singulière, ou simplement un cas particulier de l'équation primitive complette.

Car si on fait pour abreger $\Phi\,(x,y) = z$, et qu'on suppose qu'ayant tiré de cette équation la valeur de y en z, on la substitue dans la fonction $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, on aura une équation en x et z

de la forme $\frac{dz}{z} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) dx$ ou bien

$$z' = z f(x, z, z')$$

Pour que $z = 0$ soit une équation primitive singulière, il faudra que $z = 0$ donne $z'' = \frac{0}{0}$ comme nous l'avons vu dans la leçon XVI; or en prenant la dérivée de l'équation précédente, on verra que cette condition ne peut avoir lieu que lorsque $z = 0$ donnera $zf'(z') = 1$. Dans les autres cas l'équation $z = 0$ ne pourra donc être qu'un cas particulier de l'équation primitive complette.

En effet, en regardant d'abord z comme très-petite et négligeant z dans la fonction $f(x, z, z')$ on aura simplement $z' = z f(x)$, d'où l'on tire $\frac{z'}{z} = f(x)$ et prenant les fonctions primitives $l\, z = f_{,}(x) + k$, k étant une constante arbitraire.

Je dénote par $f_{,}$ avec un trait placé au bas de la caractérisque f la fonction primitive dénotée par la simple caractéristique f; on pourra de même dénoter dans l'occasion par $y_{,}$ la fonction primitive de y, par $y_{,,}$ la fonction primitive de $y_{,}$, c'est-à-dire la fonction primitive seconde de y, et ainsi des autres. Cette notation que j'avais déjà proposée dans l'ouvrage sur la *résolution des équations numériques*

me paraît aussi propre pour désigner les fonctions primitives que la notation ordinaire l'est pour les fonctions dérivées.

Maintenant il est clair que dans l'équation

$$lz = f_1(x) + k,$$

on aura $z = o$ en faisant la constante k infinie, puisque $lo = -\infty$. Ainsi $z = o$ sera alors un cas particulier de l'équation primitive complette.

Euler avoit aussi trouvé dans sa Mécanique différens exemples de cette duplicité d'intégrales; il avait même donné des règles pour les découvrir dans quelques cas, comme on le voit dans les articles 268, 303, 335 du second tome de la Mécanique; mais ce n'est que plusieurs années après qu'il s'est occupé *ex professo* de cette partie du calcul intégral dans un mémoire intitulé *Exposition de quelques paradoxes du calcul intégral*, et imprimé dans le recueil de l'Académie de Berlin pour 1756.

Dans ce mémoire, Euler se propose différens problêmes relatifs aux tangentes, qui conduisent naturellement à des équations différentielles, et il remarque qu'ils ont chacun deux solutions, dont l'une résulte de l'intégration et admet par conséquent une constante arbitraire, et dont l'autre est indépendante de l'intégration, et peut se trouver même par la différentiation de l'équation.

Voici un de ces problêmes. On demande une courbe

courbe telle que tirant de deux points donnés des perpendiculaires sur une quelconque de ses tangentes, le produit de ces perpendiculaires soit une quantité constante

Faisons passer l'axe des abscisses par les deux points donnés, et soient p et q les deux abscisses qui répondent à ces points, et t la soutangente à un point quelconque, c'est à-dire la partie de l'axe comprise entre la tangente et l'ordonnée y; on aura $t - x$ pour la partie comprise entre la tangente et l'origine des abscisses; donc $t - x + p$ et $t - x + q$ seront les parties de l'axe comprises entre les deux points donnés et la tangente.

Ayant abaissé de ces points des perpendiculaires sur la tangente, on formera par-là deux triangles rectangles semblables au triangle rectangle, formé par la tangente, l'ordonnée y et la soutangente t; il est visible que dans ces triangles les lignes $t - x + p$, $t - x + q$ répondront à la tangente même qui est $\sqrt{(y^2 + t^2)}$, et que les perpendiculaires dont il s'agit répondront à l'ordonnée y; de sorte qu'on aura pour ces perpendiculaires, les valeurs

$$\frac{(t - x + p)\,y}{\sqrt{(y^2 + t^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{(t - x + q)\,y}{\sqrt{(y^2 + t^2)}}$$

par conséquent l'équation du problême fera

$$\frac{(t - x + p)(t - x + q)\,y^2}{y^2 + t^2} = k$$

k étant une constante donnée

Or le rapport de l'ordonnée à la soutangente étant exprimé par la fonction prime y' on a $\frac{y}{t} = y'$ par conséquent $t = \frac{y}{y'}$; cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, elle se réduit à

$$\frac{(y - y'x + py')(y - y'x + qy')}{1 + y'^2} = k$$

équation du premier ordre.

Cette équation étant mise sous la forme différentielle et multipliée par $dx^2 + dy^2$ devient

$$(y\,dx - x\,dy + p\,dy)(y\,dx - x\,dy + q\,dy) - k(dx^2 + dy^2) = 0$$

c'est l'équation donnée par les conditions du problème.

Euler remarque qu'il serait très-difficile d'intégrer cette équation directement; mais qu'on y peut parvenir facilement en la différentiant.

On a ainsi, en prenant dx pour constant

$$(y\,dx - x\,dy + q\,dy)(p - x)\,d^2y + (y\,dx - x\,dy + p\,dy)(q - x)\,d^2y - 2k\,dy\,d^2y = 0$$

équation toute divisible par d^2y.

En la divisant d'abord par d^2y on a celle-ci

$$(y\,dx - x\,dy + q\,dy)\,(p - x)$$
$$+ (y\,dx - x\,dy + p\,dy)\,(q - x)$$
$$- 2k\,dy = 0$$

n'est que du premier ordre, comme la pro-
e, et qui étant combinée avec elle, donnera
élimination de dy une équation finie en x et y.
effet cette dernière équation étant multipliée
y et retranchée de la première multipliée par 2
ra celle-ci

$$dx^2 + y\,dy\,dx\,(p + q - 2x) - 2k\,dx^2 = 0$$

l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(k - y^2)}{y\,(p + q - 2x)}$$

la même équation donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(p + q - 2x)}{2(k - (p - x)(q - x))}$$

, comparant ces deux valeurs et multipliant en
, on aura

$$y^2\,(p + q - 2x)^2$$
$$= 4(k - y^2)\,(k - (p - x)(q - x))$$

elle se réduit à

$$-q)^2 + 4k\big)\,y^2 + 4k\,(p - x)\,(q - x)$$
$$= 4k^2,$$

plus simplement encore, à

$$y^2 + \frac{k}{k + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2}\left(x - \frac{p+q}{2}\right)^2 = k,$$

équation à une ellipse, dont le carré du petit axe est k, et le carré du grand axe est $k + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$ de sorte que $\frac{p-q}{2}$ sera la distance du centre aux foyers; et comme le centre de l'ellipse répond à l'abscisse $\frac{p+q}{2}$ il s'ensuit que les deux foyers répondent aux abscisses p et q, et sont par conséquent dans les deux points donnés.

En effet on sait par la théorie des sections coniques que le produit des perpendiculaires menées de chacun des foyers sur une tangente quelconque est constant, et égal au carré du petit axe

L'équation que nous venons de trouver ne renferme point de constante arbitraire puisqu'elle provient de deux équations différentielles du premier ordre par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$; mais on aura une autre équation avec une constante arbitraire par le moyen de l'autre facteur d^2y. lequel donne l'équation du second ordre $d^2y = 0$, d'où l'on tire $dy = a\,dx$, a étant une constante arbitraire; cette équation étant

combinée de nouveau avec la proposée, on aura celle-ci

$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2)$,

d'où l'on tire

$$y - ax + \frac{(p+q)a}{2}$$

$$= \pm \sqrt{\left((1+a^2)k + a^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right)}$$

équation à deux lignes droites

Il est visible, en effet, que la ligne droite satisfait aussi au même problême, pourvu qu'elle soit placée de manière que le produit des deux perpendiculaires menées des deux points donnés sur cette ligne, soit égal à k.

Or nous avons trouvé ces expressions générales des perpendiculaires, en substituant pour t sa valeur $\frac{y}{y'}$ ou bien $\frac{y\,dx}{dy}$ suivant la notation du calcul différentiel,

$$\frac{y - x\,dy + p\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{y - x\,dy + q\,dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$$

Soit $y = ax + b$ en général l'équation à la ligne droite, on aura $dy = a\,dx$; substituant ces valeurs, les deux perpendiculaires deviendront

$$\frac{b + ap}{\sqrt{(1+a^2)}} \quad \text{et} \quad \frac{b + aq}{\sqrt{(1+a^2)}}$$

et l'on aura l'équation

$$(b + ap)(b + aq) = k(1 + a^2)$$

d'où l'on tire

$$b = -a\left(\frac{p+q}{2}\right) \pm \sqrt{\left(k(1+a^2) + a^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2\right)}$$

ce qui donne les mêmes lignes droites que nous venons de trouver.

Telle est l'analise d'Euler que j'ai rapportée en entier, et même avec un peu plus de détail pour servir d'exemple dans une matière, qui est encore peu traitée dans les ouvrages élémentaires

On voit que ce problême admet réellement deux solutions très différentes, puisque l'une donne des lignes droites et l'autre donne une ellipse.

Euler n'a pas cherché à rapprocher ces deux solutions et à les faire dépendre l'une de l'autre ; il s'est contenté de donner cette duplicité de solutions comme un paradoxe de calcul intégral, par la raison que l'équation qui contient une constante arbitraire, et qu'on doit par conséquent regarder comme l'intégrale complette, ne renferme cependant pas l'autre équation finie, qui satisfait également à l'équation différentielle, ce qui paraît en effet contraire aux principes du calcul différentiel.

Euler regarde aussi comme un paradoxe que la

différentiation puisse suppléer à l'intégration, ce qui ne doit s'entendre cependant que de l'intégrale sans constante arbitraire, qui résulte immédiatement de la différentielle de l'équation proposée, combinée avec cette même équation; car pour l'autre intégrale qui dépend d'une intégration subsequente, elle est conforme aux principes généraux du calcul.

D'après la théorie que nous avons donnée sur les équations primitives singulières, on voit clairement que ces paradoxes d'Euler ne sont que des résultats particuliers de cette théorie.

Il est évident que l'équation à l'ellipse qui est sans constante arbitraire, n'est que l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre donnée par les conditions du problême, puisqu'elle résulte du facteur du même ordre, qui multiplie la dérivée de la même équation; et que l'équation à la ligne droite qui vient de l'autre facteur du second ordre, est donnée par l'équation primitive complette, avec une constante arbitraire, conformément à la théorie développée dans la leçon XVI.

Si de l'équation à la ligne droite $y = ax + b$ et de sa dérivée $y' = a$, on tire les valeurs des constantes a et b on a $a = y'$, $b = y - xy'$, et ces valeurs substituées dans l'équation donnée par les conditions du problême

$$(b + ap)(b + aq) = k(1 + a^2)$$

donnent celle-ci :

$(y - xy' + py')(y - xy' + qy') = k(1 + y'^2)$

qui est, comme l'on voit, l'équation du premier ordre à laquelle le problême conduit directement. Ainsi cette équation appartient à la classe que nous avons examinée à la fin de la leçon précédente, dont la forme générale est $\Phi(a, b) = 0$; et qui est toujours susceptible d'une équation primitive singulière qu'on peut obtenir par l'élimination de y' au moyen de la dérivée relative à y', ce qui redonne le résultat que nous avons trouvé.

Si l'on voulait tirer l'équation primitive singulière de l'équation primitive complette, d'après la théorie de la leçon XV, il n'y aurait qu'à substituer d'abord dans l'équation de condition en a et b, la valeur de b tirée de l'équation $y = ax + b$, ce qui donnera l'équation

$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2)$

qui est à deux lignes droites, et qu'on peut regarder comme l'équation primitive du problême dans laquelle a est la constante arbitraire. Ainsi il n'y aura qu'à éliminer a au moyen de cette équation et de sa dérivée, d'où l'on aura encore le même résultat, puisque l'équation en y' a la même forme que l'équation en a; ce qui sert de plus en plus à rapprocher les différentes méthodes que nous avons données.

Nous avons démontré à l'occasion du problême de Leibnitz que toute équation primitive singulière représente la courbe formée par l'intersection continuelle

nuelle des lignes représentées par l'équation primitive complette ; ainsi on peut dire que l'ellipse qui résout le problême d'Euler est formée par l'intersection continuelle de toutes les droites représentées par l'équation

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2)$$

en supposant que la constante a varie de l'une à l'autre.

Par cette considération on pourrait donc aussi résoudre le problême d'Euler, comme Leibnitz avait résolu, celui dont nous avons parlé au commencement de cette leçon, et parvenir directement à l'ellipse qui n'est donnée par l'analyse que d'une manière indirecte.

Jusques-là on n'avait encore considéré les équations primitives singulières que comme des solutions particulières qui se présentaient d'elles-mêmes et sans intégration, et on n'avait encore aucun moyen pour reconnaître *a priori* si une pareille solution pouvait être comprise ou non dans la solution générale donnée par l'intégrale complette de l'équation différentielle du problême. Euler a donné le premier une règle générale pour cet objet dans le premier volume de son calcul intégral, et Laplace a montré ensuite comment on peut déduire de l'équation différentielle, les solutions particulières qui échappent à l'intégrale complette, comme nous l'avons rapporté à la fin de la leçon XVI.

Il restait à découvrir la liaison entre ces intégrales particulières et les intégrales complettes, ainsi qu'entre les courbes données par les unes et les autres, et à rappeller toute la théorie de ces différentes intégrales aux premiers principes du calcul différentiel ; c'est ce qu'on a fait dans un mémoire sur ce sujet, imprimé dans le recueil de l'Académie de Berlin de 1774 et dans un autre mémoire imprimé dans le même recueil pour 1779.

Comme ce point d'analise est un des plus intéressant, par ses différentes applications, j'ai cru devoir en développer toute la théorie, dans ces leçons, en y joignant des considérations nouvelles et des détails historiques qui peuvent faire plaisir aux Analistes et servir à l'histoire de cette partie des Mathématiques.

LEÇON DIX-NEUVIEME.

Digression sur les équations aux différences finies.

Les premiers auteurs du calcul différentiel, Barrow et Leibnitz ont considéré les quantités variables comme croissant par des différences infiniment petites, et ont inventé les équations différentielles pour déterminer les rapports de ces différences. Comme la supposition des quantités infiniment petites repugne à la rigueur de l'analise, on a considéré depuis les accroissemens des quantités variables comme finis, et on a formé à l'imitation du calcul différentiel un nouveau calcul pour les différences finies, dans lequel les résultats sont rigoureusement exacts. Ce calcul dont Tailor avait donné la première idée dans son *methodus incrementorum* et dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers tems sous le nom de calcul aux différences finies, sert à trouver la loi des termes consécutifs d'une série ou progression dans laquelle on connaît l'expression ou la formation du terme général, et réciproquement à trouver l'expression du terme général, d'après la loi des termes consécutifs.

Mais nous observerons que dans ces recherches la considération des différences n'est point nécessaire comme dans le calcul différentiel, et qu'elle peut même être plus incommode qu'utile, parce que la suppression des termes infiniment petits qui produit

la simplification du calcul différentiel, n'ayant point lieu dans les différences finies, il arrive souvent que les formules en différences sont plus compliquées que si elles contenaient immédiatement les termes successifs eux mêmes.

D'ailleurs l'analogie qu'on a cru pouvoir établir entre le calcul aux différences infiniment petites et le calcul aux différences finies est plus apparente que réelle, malgré la conformité de quelques procédés et de quelques résultats. Car dans celui-ci on considère les différens termes de la progression comme représentés par une même fonction de quantités différentes d'un terme à l'autre, et les équations aux différences finies ne sont que des équations entre ces mêmes fonctions. Au lieu que les équations différentielles, ou aux différences infiniment petites, sont essentiellement entre des fonctions différentes de la même variable, mais fonctions dérivées les unes des autres par des règles fixes et uniformes.

Les équations aux différences finies ne sont autre chose qu'une suite d'équations semblables entre différentes inconnues, par lesquelles on peut toujours déterminer successivement chacune de ces inconnues.

Mais la loi uniforme qui regne entre ces équations, fait qu'on peut regarder leurs inconnues comme formant une suite régulière et susceptible d'un terme

général, et l'expression de ce terme donne alors la résolution générale de toutes les équations.

Ainsi le calcul qu'on a nommé aux différences finies n'est proprement que le calcul des suites, et ne peut être assimilé au calcul différentiel qui est essentiellement le calcul des fonctions dérivées.

Mais on a pensé que la considération des différences finies pouvait conduire à celle des différences infiniment petites, et que le calcul aux différences finies conserverait toute sa rigueur, en devenant calcul différentiel par l'omission des termes infiniment petits. Et delà est née la méthode des limites dans laquelle on regarde le rapport des différences infiniment petites comme la limite du rapport des différences finies, et les équations différentielles, comme les limites des équations aux différences finies.

Je ne disconviens pas qu'on ne puisse de cette manière démontrer la légitimité des résultats du calcul différentiel; mais quoique cette marche paraisse directe et naturelle, le passage du fini à l'infini exige toujours une espèce de saut, plus ou moins forcé, qui rompt la loi de continuité, et change la forme des fonctions.

Ayant réduit, comme nous l'avons fait, le calcul différentiel à ses véritables élémens, les fonctions dérivées, et l'ayant ainsi entièrement séparé du calcul aux différences finies, nous avons cru devoir dire deux mots de la nature et des usages de celui-ci qui

n'est à proprement parler que l'analise ordinaire appliquée à une suite de quantités qu'on suppose dépendte d'une même loi.

Soit une suite de quantités

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ y, & y, & y, & y, & y \end{matrix} \text{ etc,}$$

qui répondent a ces quantités en progression arithemétique

$$0, i, 2i, 3i, 4i, \text{ etc,}$$

Designons en général un terme quelconque de la première suite par y, et le terme correspondant de la seconde suite par x ; désignons de plus par y', y'', y''' etc, les termes qui dans la première suite suivent le terme y, et qui répondent aux termes

$$x + i, \; x + 2i, x + 3i, \text{ etc,}$$

de la seconde.

Enfin désignons pour plus de simplicité par les caractéristiques Δ, Δ^2 etc, les différences premières, secondes etc, des termes de la première suite de manière que l'on ait,

$$\Delta y = y' - y, \; \Delta^2 y = y'' - 2y' + y \text{ etc.}$$

A l'égard de la seconde suite, il est clair qu'on aura

$$\Delta x = 1 \text{ et } \Delta^2 x = 0 \text{ etc.}$$

Cela posé, supposons d'abord que la première suite soit formée de la seconde par cette loi très-

simple $y = a x$, a étant un coëficient constant pour toute la suite.

On aura donc aussi, en changeant y en $\overset{i}{y}$ et x en $x + i$, l'équation $\overset{i}{y} = a (x + i)$: et comme les deux équations doivent avoir lieu en même-tems, on pourra, si l'on veut, en éliminer la constante a.

Retranchant pour cela la première de la seconde, on aura $\overset{i}{y} - y = a i$ savoir $\Delta y = a i$, d'où l'on tire $a = \frac{\Delta y}{i}$; donc substituant cette valeur dans la première elle deviendra $y = \frac{x \Delta y}{i}$

La première équation $y = a x$ donne le terme général de la suite; l'autre équation $y = \frac{x \Delta y}{i}$ donne la loi entre les termes successifs; car puisque $\Delta y = \overset{i}{y} - y$ on aura

$$\overset{i}{y} = y + \frac{i y}{x}, \text{ ou } \overset{i}{y} = \frac{x + i}{x} y,$$

Réciproquement on voit que cette loi des termes étant donnée, le terme général sera nécessairement $y = a x$, a étant une constante arbitraire ; et il est

facile de se convaincre que cette expression de y en x est la plus générale qui puisse répondre à l'équation aux différences

$$\Delta y = \frac{i y}{x}.$$

Si la différence i de la progression arithmétique devenait infiniment petite, la différence correspondante Δy deviendrait infiniment petite aussi, et leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$ que nous avons vu être égal à la constante arbitraire a serait toujours la même. Dans l'infiniment petit, ce rapport devient égal à la fonction dérivée y', en regardant y comme fonction de x, et l'équation devient alors $y = x y'$, qui est l'équation dérivée, dont $y = a x$ est l'équation primitive, a étant la constante arbitraire.

Supposons maintenant cette loi, $y = a x + a^2$ qui n'est guère compliquée que la précédente.

On aura donc aussi, en changeant y en y' et x en $x + i$

$$y' = a x + 2 a i + a^2$$

rétranchant la première de celle-ci, et mettant Δy par $y' - y$ on aura

$$\Delta y = a i ;$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\Delta y}{i},$$

et

et substituant cette valeur à la place de a on aura

$$y = \frac{x \Delta . y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}$$

équation aux différences finies, et qui est indépendante de la constante a.

La première équation donne donc l'expression du terme général, et la seconde donne la loi entre les termes successifs, de manière que cette loi étant proposée, on aura, par la première, le terme général avec une constante arbitraire a.

L'analyse précédente suppose que la quantité a est indépendante de x, puisqu'elle demeure la même dans les deux équations successives. Mais si elle dépendait de x, de manière que les deux équations eussent néanmoins la même forme que dans le cas où elle est constante, il est clair que l'équation aux différences qui résulte de ces deux équations par l'élimination de a, serait encore la même; par conséquent on aurait alors plus d'une équation en x et y pour la même équation aux différences; c'est le principe qui donne les équations primitives singulières, comme on l'a vu dans la leçon XV.

Supposons donc en général que la quantité a qui répond à x, devienne, a', a'' etc. Lorsque x devient $x + i$, $x + 2i$ etc, les deux équations successives, dont l'une répond à x, et l'autre à $x + i$, seront

$$y = a x + a^2$$

$$\overset{\prime}{y} = \overset{\prime}{a}(x+i) + \overset{\prime}{a}^2$$

Or si on suppose que les quantités a et $\overset{\prime}{a}$ soient telles que l'on ait

$$\overset{\prime}{a}(x-i) + \overset{\prime}{a}^2 = a(x+i) + a^2$$

la seconde équation deviendra

$$\overset{\prime}{y} = a(x+i) - a^2$$

comme dans le cas où a est supposé constante; par conséquent on aura également par l'élimination de a l'équation aux différences

$$y = \frac{x \Delta y}{i} + \frac{\Delta . x^2}{i^2}$$

Il s'agit donc de trouver le terme général de la série

dont les termes consécutifs a et $\overset{\prime}{a}$ répondant à x et $x+i$, ont entr'eux la relation déterminée par l'équation ci-dessus qui se réduit à cette forme

$$\overset{\prime}{a}^2 - a^2 + (x+i)(\overset{\prime}{a} - a) = 0$$

et qui est comme l'on voit du genre des équations aux différences.

Cette équation se réduit à

$$(\overset{\prime}{a} - a^2 + (x+i)(\overset{\prime}{a} - a) = 0,$$

et se décompose par conséquent en ces deux-ci

$$\overset{\prime}{a} - a = 0$$

$$\overset{\prime}{a} + a + x + i = 0$$

La première donne $\acute{a} = a$ et par conséquent a égal à une constante quelconque ; c'est le cas que nous avons supposé d'abord.

La seconde donne une relation entre a et $\acute{a}$, d'après laquelle il faut trouver le terme général.

Pour simplifier cette équation, je suppose d'abord

$$a = u + mx + n,$$

m et n étant des constantes et u une nouvelle variable ; j'ai

$$\acute{a} = \acute{u} + m(x + i) + n,$$

et l'équation devient par ces substitutions

$$\acute{u} + u + (2m + 1)x + 2n + (m + 1)i = 0$$

ou je peux faire disparaître les termes indépendans de u.

Je fais donc

$$2m + 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2n + (m + 1)i = 0,$$

ce qui donne

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = -\frac{i}{4};$$

de sorte qu'en faisant

$$a = u - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

l'équation se réduit à cette forme plus simple

$$\acute{u} + u = 0.$$

J'observe maintenant qu'en supposant $u = br^x$, b et r étant des constantes, on a $\acute{u} = br^{x+i}$ et

la substitution donne

$$b\,r^{x+i} + b\,r^{x} = 0$$

équation divisible par $b\,r^{x}$ et qui donne $r^{i} + 1 = 0$ d'où l'on tire

$$r^{i} = -1 \text{ et } r = (-1)^{\frac{1}{i}}$$

Ainsi l'expression $u = b\,(-1)^{\frac{x}{i}}$ satisfait à l'équation avec la constante arbitraire b. En effet, en supposant cette équation en u et x pour faire disparaître la constante b, on prendra l'équation successive $u' = b\,(-1)^{\frac{x+i}{i}} = -b\,(-1)^{x}$ et éliminant b on aura $u' + u = 0$ équation proposée.

Donc l'expression générale de a sera

$$a = b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

et cette valeur substituée dans l'expression de y donnera un nouveau terme général avec une constante arbitraire b, qui satisfera également à la même équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta^{2} y}{i^{2}}$$

Pour faciliter cette substitution, je mets l'expression donnée de y sous cette forme

$$y = \left(a + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

et mettant pour a la valeur qu'on vient de trouver, il vient cette nouvelle expression de y

$$y = \left(b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

Comme b est ici une constante arbitraire, on peut aussi la faire disparaître par l'équation successive, dans laquelle x devient $x + i$, et y, devient y' ou $y + \Delta y$; on aura ainsi

$$y + \Delta y = \left(-b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right)^2 - \frac{(x+i)^2}{4}$$

à cause de $(-1)^{\frac{x+i}{i}} = (-1)^{\frac{x}{i}} + 1$

$$= -(-1)^{\frac{x}{i}}$$

Retranchant de cette équation, la précédente, et observant que la différence des deux carrés est le produit de la somme et de la différence des racines, on aura tout de suite

$$\Delta y = i\,b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i\,x}{2} - \frac{i^2}{4}$$

d'où l'on tire

$$b\,(-1)^{\frac{x}{i}} = \frac{\Delta y}{i} + \frac{x}{2} + \frac{i}{4};$$

et cette valeur substituée dans la première équation donne l'équation aux différences

$$y = \left(\frac{\Delta y}{i} + \frac{x}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

savoir

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}$$

qui est la même qu'on avait trouvé dans le cas où a était la constante arbitraire.

Si maintenant on suppose que la différence i devienne infiniment petite, la différence correspondante Δy le deviendra aussi; mais leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$ qui, dans le premier cas, est égal à a, et dans le second est égal à $b\,(-1)\,\frac{x}{i} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$ demeurera fini; ce rapport devient alors la fonction dérivée de y, regardée comme fonction de x; et l'équation aux différences devient par conséquent

$$y = x\,y' + y'^2,$$

qui est en effet l'équation dérivée dont la primitive est $y = a\,x + a^2$, a étant la constante arbitraire.

Car en prenant les fonctions dérivées on a $y' = a$ et substituant cette valeur, il vient $y = x\,y' + y'^2$.

Mais que devient alors la seconde expression de y qui contient la constante arbitraire b.

Suivant les principes des infiniment petits le terme $-\frac{i}{4}$ doit être rejetté vis-à-vis du terme fini $b\,(-1)^{\frac{x}{i}}$; ainsi on aurait simplement

$$y = \left(b\,(-1)^{\frac{x}{i}}\right)^2 - \frac{x^2}{4} = b^2 - \frac{x^2}{4}$$

à cause de $(-1)^{\frac{2x}{i}} = 1$ $(-1)^{\frac{x}{i}} = 1$.

Mais cette valeur de y ne satisfait pas à l'équation dérivée, à moins qu'on ne suppose $b = 0$; car elle donne

$$y' = -\frac{x}{2},$$

Faisant la substitution on a

$$b^2 - \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$$

et parconséquent $b = 0$.

Ainsi il faut dire que le passage du fini à l'infiniment petit, anéantit non-seulement les qnantités infiniment petites, mais encore la constante arbitraire.

Au reste en faisant $b = 0$ l'expression $y = -\frac{x^2}{4}$ devient une valeur singulière; car en prenant les onctions dérivées relatives à a dans l'équation primi-

rive $y = ax + a^2$ on a $x + 2a = 0$,

d'où $a = -\frac{x}{2}$, et de là $y = -\frac{x}{4}$.

Ainsi on peut regarder aussi la seconde expression de y comme une valeur singulière du terme général; mais comme elle conserve la constante b tant que les différences i sont finies, il est clair qu'elle a la même généralité que la première, en sorte qu'on peut supposer que la valeur de y soit donnée lorsque $x = 0$; ce qui n'a pas lieu pour les valeurs singulières des équations primitives ordinaires.

Feu Charles de l'Académie des Sciences est le premier qui ait fait cette remarque importante qu'à une même équation aux différences finies peuvent répondre deux équations intégrales ou sans différences, ayant chacune une constante arbitraire.

Voyez les mémoires de cette académie pour l'année 1783.

Mais les conséquences qu'il a voulu en déduire dans la suite (Mémoire de 1788) relativement aux intégrales des équations différentielles sont tout-à-fait illusoires; elles prouvent seulement qu'on ne peut pas appliquer immédiatement à l'infiniment petit, proprement dit, les résultats trouvés dans la supposition du fini, et que dans le passage du fini à l'infiniment petit il faut supprimer entierement tous les termes qui peuvent contenir l'infiniment petit, quoique

ces

ces termes puissent n'être pas eux-mêmes infiniment petits.

Ainsi dans la formule.

$$y = \left(b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4} \right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

le terme $b\,(-1)^{\frac{x}{i}}$ ne devient pas infiniment petit par la supposition de i infiniment petit; néanmoins ce terme contenant la différence i, qui devient infiniment petite dans l'équation différentielle, doit être supprimé pour avoir un résultat exact. En effet, en effaçant tout ce qui contient i dans l'équation précédente, on a simplement $y = -\frac{x^2}{4}$, comme cela doit être pour satisfaire à l'équation dérivée

La raison en est que dans le passage supposé du fini à l'infiniment petit, les fonctions changent réellement de nature, et que le $\frac{dy}{dx}$ qu'on emploie dans le calcul différentiel, est essentiellement une fonction différente de la fonction y, tandis que tant que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité n'est que la différence de deux fonctions de la même forme. D'où l'on voit que si le passage du fini à l'infiniment petit peut

être admis comme moyen mécanique de calcul, il ne peut servir à faire connaître la nature des équations différentielles, qui consiste en ce qu'elles donnent des rapports entre les fonctions primitives et leurs dérivées.

On peut trouver d'une autre manière les mêmes expressions de y qui satisfont à l'équation aux différences.

$$y = \frac{x \Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}$$

En prenant l'équation successive qui répond à $x + i$, on a aussi

$$y' = \frac{(x + i) \Delta y'}{i} + \frac{\Delta y'^2}{i^2}$$

mais $y' = y + \Delta y$, $\Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y$

donc retranchant la première équation de la seconde, on aura

$$\Delta y = x \frac{\Delta^2 y}{i^2} + \Delta y + \Delta^2 y + \frac{2 \Delta y \Delta^2 y}{i^2} + \frac{\Delta^2 y^2}{i^2}$$

savoir en multipliant par i

$$\left(x + i + \frac{2 \Delta y}{i} + \frac{\Delta^2 y}{i}\right) \Delta^2 y = 0$$

équation qui se décompose comme l'on voit en deux

$$\Delta^2 y = 0 \text{ et } x + i + 2\frac{\Delta y + \Delta^2 y}{i} = 0$$

La première donne tout de suite $\Delta y =$ à une constante qui étant supposée $a\,i$, on aura $\Delta y = a\,i$, substituant cette valeur dans l'équation aux différences, on aura comme plus haut

$$y = a\,x + a^2$$

Retenons maintenant la supposition $\Delta y = a\,i$, mais en regardant a comme une variable dépendante de x, on aura

$$\Delta \overset{'}{y} = \overset{'}{a}\,i \text{ et } \Delta^2 y = (\overset{'}{a} - a)\,i;$$

donc l'autre équation deviendra

$$x + i + a + \overset{'}{a} = 0$$

qui est la même que nous avons trouvée plus haut, et d'où nous avons tiré

$$a = b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

On aura donc

$$\Delta \overset{'}{z} = i\left(b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}\right).$$

et comme l'équation aux différences peut se mettre sous la forme

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta y}{i}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

la substitution de cette valeur de Δy donnera

$$y = \left(b\,(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{4}$$

comme plus haut

Cette manière de trouver la seconde expression de y revient à la méthode que nous avons exposée dans la leçon XVI, pour les équations primitives linéaires.

En supposant i infiniment petit les valeurs de ϕ et a' qui répondent à x et $x + i$, ne doivent différer l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite; par conséquent par le principe des infiniment petits, l'équation

$$a' + a + x + i = 0$$

se réduit à

$$2a + x = 0$$

ce qui donne $a = -\frac{x}{2}$,

d'où l'on tire $y = -\frac{x^2}{2}$, comme dans le cas de $b = 0$.

En effet l'expression de a

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

donne relativement à $x + i$

$$a' = -b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x+i}{2} - \frac{1}{4}$$

où l'on voit que dans le cas de i infiniment petite, la différence entre a et a' demeure finie tant que la constante b n'est pas nulle.

En général soit

$$F(x, y, a) = 0$$

l'équation par laquelle le terme général y est déterminé en fonction de x, a étant une constante quelconque.

Cette équation est censée avoir lieu également pour les termes successifs $y'.y''$ etc, qui répondent aux valeurs successives $x + i, x + 2i$ etc, de x; ainsi on aura

$$F(x + i, y', a) = 0$$

et on pourra par la combinaison de ces deux équations éliminer la constante a.

On aura de cette manière une équation sans a, mais qui sera en x, y, et y'. Et si à la place de y' on substitue $y + \Delta y$, l'équation sera en x, y et Δy;

ce sera alors proprement une équation aux différences premières.

De même si l'équation du terme général renferme deux constantes a et b, comme

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

on pourra faire évanouir ces deux constantes par le moyen des deux équations successives

$$F(x + i, y', a, b) = 0$$

$$F(x + 2i, y'', a, b) = 0$$

L'équation resultante sera alors entre x, y, y' et y'', ou bien entre les quantités x, y, Δy et $\Delta^2 y$ en substituant

$$y + \Delta y \text{ par } y', \text{ et } y + 2\Delta y + \Delta^2 y \text{ pour } y'';$$

ce sera donc une équation aux différences secondes, et ainsi de suite.

Donc réciproquement toute équation aux différences premières ou entre deux termes successifs comportera une constante arbitraire dans l'équation du terme général, toute équation aux différentes secondes, ou entre trois termes succesifs, comportera deux constantes arbitraires dans l'équation du terme général ; et ainsi de suite.

On peut en effet se convaincre que cela doit être par la nature même de ces équations.

Considérons par exemple une équation quelconque aux différences premières entre x, y et $\overset{1}{y}$; et supposons qu'ayant tiré la valeur de $\overset{1}{y}$ on ait

$$\overset{1}{y} = f(x, y).$$

Comme la même équation doit avoir lieu dans toute l'étendue de la série, en faisant successivement $x = 0, i, 2i, 3i$ etc, la variable y deviendra $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}$, etc. et $\overset{1}{y}$ deviendra en même-tems $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \overset{4}{y}$, etc.

Ainsi l'équation proposée donnera cette suite d'équations

$$\overset{1}{y} = (0, \overset{0}{y}), \overset{2}{y} = f(i, \overset{1}{y}) \overset{3}{y} = f(2i, \overset{2}{y}) \text{ etc.}$$

donc substituant successivement les valeurs précédentes, tous les termes $\overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}$ etc., seront données par le premier terme $\overset{0}{y}$, et un terme quelconque y répondant à x sera donné en x et $\overset{0}{y}$.

Ainsi l'expression du terme général contiendra

nècessairement la valeur arbitraire et constante du premier terme $\overset{0}{y}$.

Si l'équation proposée était aux différences secondes ou entre les termes successifs $y, \overset{1}{y}, \overset{11}{y}$, on pourrait en tirer la valeur de $\overset{11}{y}$, et l'on aurait

$$\overset{11}{y} = f(x, y, \overset{1}{y}).$$

Donc faisant successivement

$$x = 0, i, 2i, 3i \text{ etc},$$

on aurait

$\overset{2}{y} = f(0, \overset{0}{y}, \overset{1}{y}), \overset{3}{y} = f(i, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}) \overset{4}{y}, = f(2i, \overset{2}{y}, \overset{3}{y})$ etc, de sorte qu'en substituant toujours les valeurs précédentes on aurait les termes $\overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \overset{4}{y}$, etc, donnés en $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$; par conséquent le terme général y répondant à x serait exprimé en x, $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$, dans lequel $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$ ont des valeurs arbitraires et constantes.

Et ainsi pour les équations aux différences plus hautes.

On voit par-là que le nombre des constantes arbitraires qui doit entrer dans l'expression complette du terme général est nécessairement égal à l'exposant de la plus haute différence qui entre dans l'équation proposée ; d'où l'on doit conclure que toute expression du terme général qui satisfera à une équation aux

aux différences, et qui aura autant de constantes arbitraires que cette équation en admet en raison de l'ordre de ces différences devra être regardée comme complette, de quelque manière qu'on y soit parvenu.

Mais la même équation pourra encore être susceptible d'une autre expression générale qui repondra à l'équation primitive singulière et qu'on pourra trouver par les mêmes principes.

Car si

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation qui donne l'expression générale de y en x avec la constante arbitraire a, on aura l'équation entre les termes successifs y et y' ou y et $y + \Delta y$, en éliminant a des deux équations

$$F(x, y, a) = 0, \quad F(x, y', a) = 0$$

et le résultat de cette élimination, qui sera l'équation aux différences, sera la même, soit que la quantité a soit une constante, ou une quantité dépendante de x, pourvu que dans ce cas elle soit telle que l'on ait

$$F(x + i, y', a) = F(x + i, y', a'),$$

Cette équation étant délivrée des fractions et des

radicaux sera toujours divisible par $\overset{\prime}{a} - a$ puisqu'en effet $\overset{\prime}{a} = a$ satisfait; et il est clair que cette racine donne a égal à une constante comme on l'avait supposé d'abord.

Si l'équation ne contient les quantités a et $\overset{\prime}{a}$ qu'à la première dimension, le résultat de la division ne contiendra plus ces quantités, ainsi $\overset{\prime}{a} - a = 0$ sera la seule racine, et il n'y aura alors qu'une seule expression du terme général.

Mais si ces mêmes quantités forment plusieurs dimensions dans l'équation dont il s'agit, elles s'y trouveront encore après la division par $\overset{\prime}{a} - a$, et l'on aura une nouvelle équation entre a et $\overset{\prime}{a}$, qui sera par conséquent aux différences premières par rapport à la variable a et qui pourra donner encore une ou plusieurs valeurs de a avec de nouvelles constantes arbitraires. C'est le cas de l'équation que nous avons considerée ci-dessus.

En regardant a comme une fonction de x, $\overset{\prime}{a}$ qui répond à $x + i$ deviendra par le développement

$$\overset{\prime}{a} = a + i\,a' + \frac{i^2}{2}\,a'' + \text{etc},$$

et la fonction

$$F(x, y, \dot{a})$$

deviendra aussi

$$F(x, y, a) + i a' F^{1}(a) + \text{etc},$$

par conséquent l'équation en a et $\dot{a}$ deviendra

$$i a' F'(a) + \text{etc}; = 0.$$

Lorsque i devient infiniment petit, les termes qui contiennent i^2, i^3 etc, devant être négligés vis à-vis de ceux qui ne contiennent que i, l'équation précédente se réduit

$$i a' F'(a) = 0$$

laquelle donne $a' = 0$ et par conséquent a constante ou

$$F'(a) = 0$$

d'où l'on tire a en fonction de x ; ; c'est le cas des équations primitives singulières.

Dans ce cas donc l'expression de a ne peut plus contenir de constante arbitraire ni dépendre de la quantité i, par conséquent il faut que les termes qui renfermeroient i dans l'expression générale de a tirée de l'équation en a et $\dot{a}$ disparoissent absolument dans le cas de i infiniment petit, quand même ces termes ne deviendroient pas alors infiniment petits, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent.

La plûpart des formules qu'on a trouvées par la considération des différences finies, et qu'on a ensuite traduites en calcul différentiel, présentent des difficultés analogues dans le passage du fini à l'infiniment petit, et qu'on ne peut lever que par le même principe de rejetter indistinctement des formules finies, tous les termes qui contiendroient des différences infiniment petites de quelque manière que ces différences s'y trouvent contenues.

Ainsi par exemple on a en employant les différences successives

$$y' = y + \Delta y, \; y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y$$

$$y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y, \text{ etc,}$$

et en général

$$y^{m} = y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 y + \text{etc,}$$

c'est l'expression du terme m^{eme} qui répond au terme $x + mi$ de la série $x, x + i, x + 2i$ etc.

Si donc on fait $mi = \omega$, le terme répondant à $x + \omega$ sera par la substitution de $\frac{\omega}{i}$ au lieu de m

$$y + \omega \frac{\Delta y}{i} + \frac{\omega(\omega - i)}{i} \cdot \frac{\Delta^2 y}{i^2}$$

$$+ \frac{\omega(\omega - i)(\omega - 2i)}{2.3} \cdot \frac{\Delta^3 y}{i^3} + \text{etc.}$$

Cette formule donnée d'abord par Newton à la fin des Principes pour l'interpolation des lieux des comètes a été ensuite apliquée par Tailor au cas ou les différences i devenant infiniment petites et égales à dx les différences Δy, $\Delta^2 y$ etc., deviennent dy, $d^2 y$, etc.

Alors en négligeant les termes, i, $2i$, $3i$, etc ; vis-à-vis de ω on a la formule

$$y + \omega \frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3} \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} + \text{etc.}$$

qui exprime la valeur de ce que devient y lorsque x devient $x + \omega$.

C'est la formule connue sous le nom du théorême de Tailor.

Cependant comme les coëficiens de i dans les facteurs successifs de la première formule vont en augmentant continuellement, il est visible que quelque petit que soit i, il se trouvera à la fin multiplié par un coëficient si grand que sa valeur pourra de-

venir comparable à celle de ω, et ne pourra plus être, sans erreur, négligée vis-à-vis de celle ci. Mais la suppression de tous les multiples de i, quelque grands qu'ils soient, est néanmoins commandée par la nature de la chose, afin que les quantités

$$\frac{\Delta y}{i}, \quad \frac{\Delta^2 y}{i^2}, \text{ etc},$$

cessent d'être exprimées par les différences finies des quantités y, y', y'' etc, qui sont des fonctions semblables de x, $x+i$, $x+2i$ etc., et deviennent simplement les fonctions dérivées y', y'', etc, de la même fonction y.

En effet la quantité y étant regardée comme une fonction de x, la formule dont il s'agit doit donner la même fonction de $x+\omega$, et nous avons démontré d'une manière directe et rigoureuse que cette fonction développée suivant les puissances de ω est exactement égale à la série.

$$y + \omega y' + \frac{\omega}{2} y'' + \frac{\omega^3}{2.3} y''' + \text{etc.}$$

La formule des sinus des arcs multiples s'applique de la même manière au développement des sinus par l'arc, et est sujette aux mêmes difficultés.

En effet on a, comme on l'a vu dans la leçon X,

$$\sin m x = m \cos x^{m-1} \sin x$$

$$- m \frac{(m-1)(m-2)}{2.3} \cos x^{m-1} \sin x^3$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} \cos x^{m-5} \sin x^5$$

— etc.

Supposons x infiniment petit et m infini, ensorte que $m x$ ait une valeur finie z, donc $m = \frac{z}{x}$, et les coëficiens

$$m, \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5} \text{ etc.}$$

deviendront en rejettant vis-à-vis de z tous les multiples de x quelque grands qu'ils puissent être

$$\frac{z}{x}, \frac{z^3}{2.3x^3}, \frac{z^5}{2.3.4.5x^5} \text{ etc.}$$

D'un autre côté $\sin x$ se réduit à x et $\cos x$ à 1; donc faisant ces substitutions on a

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3,4.5} - \text{etc.}$$

formule exacte et rigoureuse, comme nous l'avons trouvé par les méthodes directes.

LEÇON VINGTIÈME.

Des fonctions de deux ou plusieurs variables ; de leurs fonctions dérivées. Notation et formation de ces fonctions. Equations dérivées à plusieurs variables. Théorie générale de ces équations. Methodes pour trouver les équations primitives des équations du premier ordre.

Nous n'avons encore traité que des fonctions d'une seule variable ; car lorsque nous avons considéré des fonctions de deux ou de plusieurs variables, nous avons regardé ces variables elles-mêmes comme fonctions d'une seule et même variable. Or si on considère une fonction de deux ou de plusieurs variables indépendantes, il est clair que cette fonction pourra avoir differentes fonctions dérivées relatives aux differentes variables, et qui naîtront de la fonction primitive par le simple développement, en attribuant à chaque variable un accroissement particulier.

Ainsi le calcul des fonctions dérivées relatives à une seule variable conduit naturellement à celui des fonctions dérivées relatives à différentes variables, lequel n'est comme l'on voit qu'une généralisation du premier et dépend des mêmes principes.

Si les inventeurs du calcul différentiel l'avaient regardé d'abord, comme le calcul des fonctions dérivées, ils auraient été conduits naturellement et immé-

médiatement au calcul des fonctions dérivées, relà. tives à plusieurs variables; et il ne se serait pas passé un demi siècle entre la découverte du calcul différentiel proprement dit, et celle du calcul aux différences partielles, qui répond au calcul des fonctions dérivées relatives à différentes variables. A plus forte raison, au lieu d'envisager ce dernier comme un nouveau calcul, on l'aurait seulement regardé comme une nouvelle application ou plutôt comme une extension du calcul différentiel, et on aurait dès le commencement embrassé sous un même point de vue et sous une même dénomination, les différentes branches du même calcul qui ont été long tems séparées et comme isolées.

Soit d'abord $f(x, y)$ une fonction quelconque de deux variables x et y que nous regarderons comme indépendantes l'une de l'autre. Si dans cette fonction on substitue à la fois $x + i$ à la place de x, et $y + o$ à la place de y, les deux quantités i et o étant indéterminées ; qu'ensuite on développe la fonction

$$f(x + i, y + o)$$

suivant les puissances ascendantes de i et o, il est clair que le premier terme sans i ni o, sera la fonction proposée $f(x, y)$, et que les autres termes seront de nouvelles fonctions de x et y multipliées successivement par

$$i, o, i^2, i\,o, o^2, i^3 \text{ etc.}$$

Ces fonctions seront aussi dérivées de la fonction primitive $f(x, y)$; et on trouvera la loi de leur dérivation en considérant succesivement les dérivées relatives à chaqu'une des quantités i et o.

Pour cela on commencera par supposer qu'il n'y ait que la variable x qui devienne $x + i$, la variable y demeurant la même, et on developpera la fonction $f(x + i, y)$ comme une simple fonction de x. On supposera ensuite que dans les fonctions dérivées relatives à x la variable y devienne $y + o$ et on developpera chacune de ces fonctions comme des fonctions de y, en regardant alors la variable x comme une constante.

Il naîtra ainsi du développement de

$$f(x + i, y + o),$$

différentes fonctions dérivées de la fonction primitive $f(x, y)$, dont les unes seront relatives à la variable x, les autres seront relatives à la variable y; et d'autres enfin seront relatives en partie à la variable x et en partie à la variable y; la loi du développement étant toujours la même, mais appliquée successivement aux differentes variables.

Mais pour ne pas confondre dans la notation ces différentes fonctions dérivées, on pourra dénoter les fonctions dérivées relatives à la seule variable x par des traits appliqués, comme à l'ordinaire, à la caractéristique de la fonction et suivis d'une virgule; les fonctions dérivées relatives à la variable y par des traits appliqués à la même caractéristique, mais précédés d'une virgule; enfin les fonctions dérivées relatives en partie à la variable x et en partie à la variable y par des traits séparés par une virgule, de

manière que ceux qui précèdent la virgule se rapportent à la variable x, et ceux qui la suivent se rapportent à la variable y.

Cette notation conserve mieux l'analogie qui doit régner entre les fonctions dérivées et la fonction primitive $f(x, y)$ dans laquelle la virgule sépare les deux variables indépendantes x et y, que celle que j'avois employée dans la Théorie des fonctions en appliquant au bas de la caractéristique f les traits relatifs aux fonctions dérivées par rapport à la seconde variable y.

D'ailleurs nous trouvons plus convenable d'employer comme nous l'avons déjà fait dans la leçon XVIII les traits inférieurs pour désigner les fonctions primitives d'une fonction donnée.

De cette manière on aura donc en premier lieu

$$f(x+i, y) = f(x, y) + if'(x, y) + \frac{i}{2} f_{,}(x, y) + \frac{i^3}{2.3} f''_{,}(x, y) + \text{etc.}$$

Substituons maintenant partout $y + o$ à la place de y, on aura

$$f(x+i, y+o) = f(x, y+o) + if'(x, y+o) + \frac{i^2}{2} f''(x, y+o) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x, y+o) + \text{etc.}$$

Developpons, successivement, les fonctions

$f(x, y+o)$, $f'^{,}(x, y+o)$, $f''^{,}(x, y+o)$ etc,

comme des fonctions de $y+o$, on aura pareillement

$$f(x, y+o) = f(x, y) + o f^{,\prime}(x, y)$$

$$+ \frac{o^2}{2} f^{,\prime\prime}(x, y) + \frac{o^3}{2.3} f^{,\prime\prime\prime}(x, y) + \text{etc},$$

$$f'^{,}(x, y+o) = f'^{,}(x, y) + o f'^{,\prime}(x, y)$$

$$+ \frac{o^2}{2} f'^{,\prime\prime}(x, y) + \text{etc},$$

$$f''^{,}(x, y+o) = f''^{,}(x, y) + o f''^{,\prime}(x, y) + \text{etc},$$

et ainsi de suite.

Faisant donc ces substitutions et ordonnant les termes par rapport aux puissances et aux produits de i et o on aura ce développement complet

$$f(x+i, y+o) = f(x, y) + i f'^{,}(x, y)$$

$$+ o f^{,\prime}(x, y)$$

$$+ \frac{i^2}{2} f''^{,}(x, y) + i o f'^{,\prime}(x, y)$$

$$+ \frac{o^2}{2} f^{,\prime\prime}(x, y)$$

$$+ \frac{i^3}{2.3} f'''(x,y) + \frac{i^2 o}{2} f''{}'(x,y)$$

$$+ \frac{i o^2}{2} f'{}'' (x,y) + \frac{o^3}{2.3} f''' (x,y) + \text{etc},$$

dans lequel la forme générale des termes est

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots n)} f^{m,n}(x,y)$$

Dans l'opération que nous venons de faire pour avoir le développement de $f(x+i, y+o)$, nous avons commencé par substituer dans $f(x,y)$, $x+i$, pour x, et nous avons développé suivant i; nous avons ensuite substitué dans tous les termes de ce développement $y+o$ pour y, et nous avons développé suivant o

Or il est visible qu'on aurait indentiquement le même résultat si on commençait l'opération par la substitution de $y+o$ à la place de y et par le développement suivant o, et qu'on fit ensuite la substitution de $x+i$ pour x, et le développement suivant i.

De cette manière on aurait d'abord les fonctions primes, secondes, etc, relatives à y, c'est-à-dire suivant la notation que nous venons d'employer les fonctions

$$f'(x,y), f''(x,y) \text{ etc.}$$

Ensuite on aurait les fonctions primes, secondes etc, de celles-ci relatives à x, et qui seraient désignées par

$$f''^{,}(x,y), f'''^{,}(x,y) \text{ etc,}$$

$$f'^{,'}(x,y), f''^{,''}(x,y) \text{ etc,}$$

et on obtiendrait ainsi la même formule que ci-dessus, comme cela doit être.

Mais il faut remarquer que dans le premier procédé la fonction seconde $f'^{,'}(x,y)$ relative à la fois à x et y s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à x, ce qui donne $f'^{,}(x,y)$ et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, d'où résulte la fonction seconde $f'^{,'}(x,y)$; et dans le second procédé la même fonction s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à y, ce qui donne $f'^{,}(x,y)$. et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à x, ce qui donne également $f'^{,'}(x,y)$

D'où il suit qu'il est indifférent dans quel ordre se fasse la double opération nécessaire pour passer de la fonction primitive $f(x,y)$ à la double dérivée $f'^{,'}(x,y)$

Et comme on doit dire la même chose des autres

fonctions dérivées, dénotées par des traits séparés par une virgule, on en peut conclure en général que les opérations indiquées par les traits placés avant et après la virgule, sont absolument indépendantes entre elles, et qu'elles conduisent aux mêmes résultats, quelqu'ordre qu'on suive en prenant les fonctions dérivées relativement à x et y, indiquées par les traits qui précèdent ou qui suivent la virgule.

Ainsi on aura également la valeur de la fonction dérivée triple $f^{''','}(x, y)$ en prenant la fonction seconde de $f(x, y)$ relativement à x, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y; ou en prenant d'abord la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à y et ensuite la fonction seconde de celle-ci relativement à x; ou bien encore en prenant la fonction prime de $f(x, y)$ relativement à x, ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, et enfin la fonction prime de cette dernière relativement à x, et ainsi de suite

Soit par exemple

$$f(x, y) = \frac{x^3}{y^2}$$

on aura les fonctions primes relatives à x et y

$$f'(x, y) = \frac{3x^2}{y^2}, \quad f'(x, y) = -\frac{2x^3}{y^3}$$

La premiere donnera relativement à y la dérivée

f

$$f^{1,1}(x,y) = -\frac{6x^6}{y^3}$$

et la seconde donnera également relativement à x

$$f^{1,1}(x,y) - \frac{6x^2}{y^3}$$

ensuite on aura relativement à x, et à y seuls

$$f^{1,1}(x,y) = \frac{6x}{y^2}, f^{1,11}(x,y) = \frac{6x^3}{y^4}$$

La dérivée relativement à y de $f^{11,1}(x,y)$ sera

$$f^{11,1}(x,y) = -\frac{12x}{y^3}$$

et la dérivée relativement à x de $f^{1,1}(x,y)$ sera aussi

$$f^{11,1}(x,y) = -\frac{12x}{y^3}$$

et ainsi des autres.

A l'imitation de ce que nous avons fait sur les fonctions d'une variable, si on suppose que la variable z soit une fonction de deux variables x et y soit explicite, soit donnée simplement par une équation quelconque entre x, y et z, on pourrait désigner par

$$z^{1,1}\ z^{1,}, z^{11,1}, z^{1,11}, z^{1,11}\ \text{etc},$$

ses différentes fonctions dérivées, en appliquant à la lettre z les traits avec la virgule, qu'on appliquerait à la caractéristique *f*.

Ainsi x devenant $x + i$ et y devenant en même tems $y + o$, la valeur de z deviendra

$$z + i z'_{,} + o z'_{,} + \frac{i^2}{2} z''_{,} + i o z'_{,}{}' + \frac{o^2}{2} z''_{,}$$

$$+ \frac{i^3}{2.3} z'''_{,} + \frac{i^2 o}{2} z''_{,}{}' + \text{etc},$$

et le terme général de cette série, sera

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3..m)(1.2.3..n)} z^{(m,n)}$$

On voit que les fonctions de deux variables engendrent par le développement différentes sortes de fonctions dérivées, dont la dérivation répond à chacune de ces variables; et que ces fonctions dérivées se forment de la même manière et par les mêmes règles que celles d'une seule variable, en considérant chaque variable séparément et successivement; d'où il s'ensuit que tout ce que nous avons démontré sur les fonctions d'une seule variable, pourra s'appliquer de même aux fonctions de deux variables relativement à chacune d'elles.

On pourra donc aussi étendre la théorie des fonctions dérivées aux fonctions de trois variables ou d'un

plus grand nombre, car il ne s'agira que de répéter séparément pour chaque variable les mêmes opérations et de les désigner par une notation semblable.

Dans les leçons précédentes où nous ne considérions que les fonctions dérivées, relativement à une seule variable, lorsqu'il s'est présenté des fonctions de plusieurs variables, nous nous sommes contenté de renfermer sous la caractéristique des fonctions dérivées, la variable par rapport à laquelle nous voulions avoir la fonction dérivée.

Ainsi pour ne pas anticiper sur ce qui regarde les fonctions dérivées relatives à plusieurs variables, nous avons dénoté jusqu'ici par

$$f'(x), f''(x) \text{ etc},$$

les fonctions dérivées de $f(x, y)$ relatives à la seule variable x qui suivant la notation précedente, seraient

$$f'^{)}(x, y), f''^{)}(x, y) \text{ etc},$$

Cette manière de noter les fonctions dérivées relativement à une seule variable nous suffisait alors; et nous pourrons l'employer encore quelquefois pour plus de commodité, pourvu qu'on soit prévenu de son identité avec la notation que nous venons d'établir.

Quoique dans les fonctions de deux variablees que nous considérons ici, les deux variables soient censées indépendantes, et que ce soit même cette indépendance qui produise les différentes espèces

de fonctions dérivées, dont nous venons de parler, rien n'empêche cependant qu'on ne puisse regarder ces variables elles mêmes comme des fonctions d'une autre variable quelconque, mais fonctions indéterminées et arbitraires.

Par cette considération, on peut ramener en quelque manière la théorie des fonctions des deux variables à celle des fonctions d'une seule, et appliquer sur-tout au développement des fonctions de deux ou de plusieurs variables, ce que, nous avons démontré dans la leçon IX sur le développement des fonctions d'une seule variable.

Soit z une fonction de deux variables x et y; supposons que chacune de ces variables soit elle-même une fonction d'une autre variable t; de manière que z devienne aussi une fonction de t, sous ce point de vue lorsque t devient $t + i$, z deviendra par la formule générale (leçon II).

$$z + i z' + \frac{i^2}{2} z'' + \frac{i^3}{2.3} z''' + \text{etc.}$$

Et si dans ce développement, on veut s'arrêter au terme $\mu^{ème}$ (leçon IX) on aura les limites du reste, par le terme qui suivra; savoir

$$\frac{i^\mu}{1.2.3\ldots n} z^{(\mu)}$$

en mettant $t + i$ à la place de t dans la fonction

$z^{(n)}$ et prenant la plus grande et la plus petite valent de cette fonction depuis $i = o$ jusqu'a la valeur donnée de i, ou des valeurs quelconques plus grandes et plus petites que celle-ci.

Or x et y étant supposées fonctions de t, lorsque t devient $t + i$, x et y deviennent par la même formule générale

$$x + i\,x' + \frac{i^2}{2}\,x'' + \text{etc},$$

et $$y + i\,y' + \frac{i^2}{2}\,y'' + \text{etc},$$

et on trouvera les valeurs des fonctions dérivées

$$z', z'' \text{ etc}, \text{ en } x, y, x', y', x'', y'' \text{ etc},$$

par les procédés exposés dans la leçon VI.

Si on ne veut avoir le développement de z que par rapport aux accroissemens $i\,x'$ et $i\,y'$ de x et y il n'y aura qu'à supposer x' et y' constans, par conséquent $x'' = o$, $y'' = o$ etc, et x', y' pourront être des coëficiens constans quelconques.

Si dans les accroissemens de x et y on voulait considérer les deux termes

$i\,\dot{x} + \frac{i^2}{2}\,\ddot{x}$, et $i\,\dot{y} + \frac{i^2}{2}$

on ne ferait alors que $\dddot{x} = 0\ \dddot{y} = 0$ et

et $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$

pourraient être prises pour des consta
ques ; et ainsi de suite.

Soit, par exemple,

$$z = (x^2 + y^2)^m$$

on aura, en prenant les dérivées d'aprés

et supposant $\dot{x}, \dot{y}$ constantes

$$\dot{z} = 2m(x\dot{x} + y\dot{y})(x^2 + y^2$$

$$\ddot{z} = 2m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x^2 + y^2$$

$$+ 4m(m-1)x\dot{x} + y\dot{y})^2(x^2 +$$

$$\dddot{z} = 12m(m-1)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)(x\dot{x} + y\dot{y})(x$$

$$+ 8m(m-1)(m-2)(x\dot{x} + y\dot{y})^3(x^2$$

et ainsi de suite.

Donc lorsque x et y deviennent $x +$
on aura

$$((+i\dot{x})^2 + (y + i\dot{y})^2)^m = (x$$

$$+ 2m(x\overset{n}{\acute{x}} + y\acute{y})(x^2+y^2)^{m-1}\,i$$

$$+ \Big(2m(\acute{x}^2+\acute{y}^2)(x^2+y^2)^{m-1}$$

$$+ 4m(m-1)(x\acute{x}+y\acute{y})^2(x^2+y^2)^{m-2}\Big)\frac{i^2}{2}$$

$+$ etc.

Si l'on veut s'arrêter à ces trois premiers termes, alors le terme suivant étant $\frac{i^3}{2.3}z'''$, on aura les limites du reste en substituant $x + i\acute{x}$, $y + i\acute{y}$ au lieu de x, y dans l'expression de z''', et prenant la plus grande et la plus petite valeur de cette expression depuis $i = 0$.

Si $m - 3$ est un nombre positif, et que $\acute{x}$ et $\acute{y}$ soient aussi des quantités positives, il est facile de voir que la plus petite valeur de z''' sera

$$12\,m(m-1)(\acute{x}^2+\acute{y}^2)(x\acute{x}+y\acute{y})(x^2+y^2)^{m-2}$$

$$+ 8\,m(m-1)(m-2)(x\acute{x}+y\acute{y})^3(x^2+y^2)^{m-3}$$

qui répond à $i = 0$; et que la plus grande sera cette

même quantité, en y mettant $x + t\overset{\prime}{x}$ et $y + i\overset{\prime}{y}$ à la place de x et y.

Si on voulait avoir le developpement de z répondant à $x + i$, et $y + o$, comme dans le commencement de cette leçon, il est clair qu'il n'y aurait qu'à faire $\overset{\prime}{x} = 1$, et $i\overset{\prime}{y} = o$; on trouverait des résultats semblables.

Car en désignant par des traits sans virgule les fonctions dérivées par rapport à la variable principale t, et par des traits séparés par une virgule les fonctions dérivées relativement à chacune des variables x et y, comme nous l'avons fait ci-dessus, on aura, suivant ce qu'on a dit dans la leçon VI, sur les dérivées des fonctions composées d'autres fonctions,

$$z' = x' z'' + \overset{\prime}{y} z^{,\prime};$$

delà en prenant les fonctions dérivées par rapport à la variable principale t

$$z'' = x'' z'' + y'' z^{,\prime}$$

$$+ \overset{\prime}{x} (z'')' + y' (z^{,\prime})'.$$

Mais z'' et $z^{,\prime}$ étant aussi regardées comme des fonctions de x et y, leurs dérivées relatives à t seront

$$(z'')' = x' z''' + y' z''',$$

$$(z''')' = x' z''' + y' z'''';$$

Donc substituant

$$z'' = x'' z'' + y'' z''',$$

$$+ x'^2 z''' + 2 x' y' z''' + y'^2 z''''$$

et ainsi de suite.

Si les fonctions dérivées x' et y' relativement à s sont constantes, ensorte que

$$x'' = 0, \; y'' = 0, \; x''' = 0 \text{ etc},$$

on aura simplement

$$z' = x' z'' + y' z'''$$

$$z'' = x'^2 z''' + 2 x' y' z''' + y'^2 z''''$$

$$z''' = x'^3 z''' + 3 x'^2 y' z''''$$

$$+ 3 x' y'^2 z'''' + y'^3 z''''' \text{ etc},$$

$$z^{(m)} = x'^m z^{(m)}, + m x'^{m-1} y' z^{(m-1)},$$

$$+ \frac{m(m-1)}{2} x'^{m-2} y'^2 z^{(m-2)}, + \text{etc},$$

Ces valeurs substituées dans la formule générale

$$z + i z' + \frac{i^2}{2} z'' + \frac{i^3}{2.3} z''' + \text{etc},$$

donnent

$$z + i (x' z'' + y' z'')$$

$$+ \frac{i^2}{2} (x'^2 z''' + 2 x' y' z''' + y'^2 z''')$$

$$+ \frac{i^3}{2.3} (x'^3 z''' + 3 x'^2 y' z''' + 3 x y'^2 z''' + y'^3 z''')$$

etc.

Et si on fait

$$x = 1, \quad i y' = 0$$

on aura la même formule trouvée plus haut pour le développement de z, suivant les puissances de i et o.

Les expressions des fonctions z', z'' etc, que nous venons de trouver donnent la composition des fonctions dérivées des fonctions quelconques de deux variables x, y.

Ainsi, en faisant $x' = 1$, ce qui revient à prendre x pour variable principale, c'est-à-dire à regarder y comme fonction de x, on veut que

$$\psi(x, y) + y' \varphi(x, y)$$

soit une fonction dérivée d'une fonction de x et y, en la comparant à l'expression de z' il faudra que l'on ait

$$\psi(x, y) = z'', \varphi(x, y) = z'''$$

Pour éliminer z de ces deux équations, il n'y a qu'à prendre leurs dérivées par rapport à y pour la première, et par rapport à x pour la seconde, on aura ainsi :

$$\psi'(y) = z''' \text{ et } \varphi'(x) = z'^{IV} ;$$

d'où l'on tire

$$\psi'(y) = \varphi'(x)$$

C'est l'équation de condition connue, que nous avons trouvée à la fin de la leçon XIV, d'après nos formules générales.

Si cette condition n'était pas remplie, il serait alors impossible que la formule $\psi(x, y) + y' \varphi(x, y)$ fût une fonction dérivée exacte, d'une fonction de x et y indépendamment d'aucune relation entre x et y.

Ainsi on ne pourrait pas supposer l'équation

$$z' = \psi(x, y) + y' \varphi(x, y)$$

dans le sens où l'on doit entendre l'expression de z', à moins de supposer en même-tems une rela-

tion quelconque entre x et y, ou même entre x, y, z.

En général si on supposait l'équation

$$z' + x' \psi(x, y, z) + y' \varphi(x, y, z = 0$$

elle ne pourrait avoir une équation primitive qu'autant qu'elle satisferait à une équation de condition que nous avons donnée à la fin de la leçon XIV et qui se réduit à

$$\psi'(y) - \varphi'(x) + \varphi'(\cdot) \times \psi(x, y, z) - \dot{\psi}'(z) \times \varphi(x, y, z) = 0,$$

pour que la variable pût être une fonction de x et y indépendamment d'aucune relation entre x et y.

Si cette équation de condition n'a pas lieu, alors l'équation elle-même ne peut avoir lieu, à moins qu'on ne suppose une relation quelconque, entre x, y, z, de manière que deux de ces variables, deviennent fonctions de la troisième.

Ainsi dans ce cas, en supposant,

$$z = f(x, y)$$

on aura

$$z' = f'(x) + y' f'(y),$$

et substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on aura alors une équation en x, y et y' par laquelle on pourra trouver la valeur de y en x et l'on aura y et z en fonctions données de x, la fonction $f(x, y)$ demeurant indéterminée.

Mais comme on aurait alors une équation du pre-

mier ordre en x et y, dont il serait difficile, et peut-être impossible, de trouver l'équation primitive, on a cherché les moyens de donner à la fonction arbitraire une forme telle que l'on ait immédiatement pour la détermination de y et z en x, deux équations entre ces variables.

Pour en donner un exemple, très-simple, supposons l'équation

$$z' = x\,y\,(x + y\,y')$$

on aura ici,

$$\psi(x, y) = x^2, \; y\varphi(x, y) = x\,y^2;$$

donc

$$\psi'(y) = x^2, \; \varphi'(x) = y^2,$$

Ainsi, il est impossible que z soit une fonction de x, et y regardées comme indépendantes entre elles.

On fera donc $y = f x$, et l'on aura $y' = f' x$; donc

$$z' = x^2 f x + x f^2 x f' x;$$

et l'on aura z égal à la fonction primitive de

$$x^2 f x + x f^2 x f' x$$

Mais pour éviter la recherche de cette fonction primitive; on mettra le terme $x\,y^2\,y'$ de l'expression de z' sous la forme $\left(\frac{x\,y^3}{3}\right)' - \frac{y^3}{3}$;

Alors l'équation devient

$$z' = \left(\frac{x y^3}{3}\right)' + y x^2 - \frac{y^3}{3}.$$

Si donc on suppose

$$y x^2 - \frac{y^3}{3} = \varpi$$

l'équation deviendra

$$z' = \left(\frac{x y^3}{3}\right)' + f' \varpi,$$

dont la primitive est

$$z = \frac{x y^3}{3} + f \varpi.$$

Ainsi, ces deux équations remplissent conjointement l'équation proposée, la fonction $f \varpi$ demeurant arbitraire.

On doit dire, à plus forte raison, la même chose des équations que l'on pourrait supposer entre x, y, z et y', z' dans lesquelles les fonctions dérivées y' z' monteraient à des puissances quelconques.

Soit supposée, par exemple, l'équation

$$z'^2 = 1 + y'^2$$

En faisant $y = f x$, on aurait

$$z' = \sqrt{(1 + f' x)^2}$$

Et il faudrait pour avoir z en x trouver la fonction primitive de $\sqrt{(1+f'x^2)}$; ce qui est impossible, tant que la fonction fx demeurera indéterminée, à moins d'employer les séries.

Mais en introduisant une troisième variable, on peut avoir des expressions finies de x, y, z, en fonctions de cette même variable.

Pour cela il faut rétablir la fonction prime x' qui est $= 1$ lorsque x est la variable principale, et substituer par conséquent $\frac{y'}{x'}$, et $\frac{z'}{x'}$ à la place de y' et z', conformément aux principes établis dans la leçon VII. Ainsi l'équation sera

$$z'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Pour résoudre cette équation de la manière la plus générale, nous emploirons un principe dont nous ferons dans la suite un plus grand usage; et qui consiste à trouver d'abord des expressions de x, y, z, qui y satisfassent avec des constantes arbitraires, et à rendre ensuite ces constantes variables, de manière que les expressions des dérivées x', y', z' restent les mêmes.

Prenons un angle quelconque ω, et puisque

$$\sin \omega^2 + \cos \omega^2 = 1$$

en multipliant le second membre de l'équation par $\sin \omega^2 + \cos \omega^2$, le premier ne changera pas.

Or le produit de $x'^2 + y'^2$ par $\sin \omega^2 + \cos \omega^2$ peut se mettre sous la forme

$$(y' \cos \omega - x' \sin \omega')^2 + (y' \sin \omega + x' \cos \omega)^2;$$

de sorte que l'équation proposée deviendra

$$z'^2 = (y' \cos \omega - x' \sin. \omega)^2$$

$$+ (y' \sin \omega + x' \cos \omega)^2$$

Supposons

$$y' \sin \omega + x' \cos \omega = \theta$$

ce qui est permis à cause de l'indéterminée ω, on aura, en extrayant la racine carrée des deux membres

$$z' = y' \cos \omega - x' \sin \omega.$$

Regardons d'abord l'angle ω comme constant; les deux équations que nous venons de trouver, auront pour primitives ces deux-ci

$$z = y \cos \omega - x \sin \omega + a,$$

$$y \sin \omega + x \cos \omega = b.$$

a et b étant les deux constantes arbitraires.

Ainsi ces deux équations donnent des valeurs de y et z en x qui satisfont à l'équation proposée quelles que soient

soient les valeurs des trois constantes a', b et ω, comme on peut s'en assurer par la substitution.

Or il est facile de concevoir que ces mêmes valeurs satisferont encore à la proposée, en supposant que les quantités a, b, et ω soient variables, pourvu que les dérivées x', y', z' restent les mêmes ; ce qui aura lieu, si en prenant les dérivées des deux équations précédentes, les termes dus aux dérivées de a, b et ω se détruisent.

Il n'y aura donc qu'à prendre les dérivées des mêmes équations, par rapport à a, b et ω, et déterminer par leur moyen les variables a et b.

Regardons dans ces dérivées la variable ω comme la principale, nous ferons $\omega' = 1$, et l'on aura

$$-y \sin \omega - x \cos \omega + a' = 0$$

$$y \cos \omega - x \sin \omega = b'.$$

Mais nous avons déjà $y \sin \omega + x \cos \omega = b$; donc on aura $-b + a' = 0$, ce qui donne $b = a'$, et par conséquent $b' = a''$

Ainsi on aura ces trois équations

$$z = y \cos \omega - x \sin \omega + a,$$

$$y \sin \omega + x \cos \omega = a',$$

$$y \cos \omega - x \sin \omega = a''.$$

Or, a étant une fonction quelconque de ω, si on la dénote par $f\omega$, on aura $a' = f'\omega$, $a'' = f''\omega$, et les trois équations précédentes fourniront ces expressions de x, y, z en ω

$$x = \cos\omega \times f'\omega - \sin\omega \times f''\omega$$

$$y = \sin\omega \times f'\omega + \cos\omega \times f''\omega$$

$$z = f\omega + f''\omega,$$

la fonction $f\omega$ demeurant arbitraire

Ces formules pourraient servir à trouver des courbes rectifiables; car si x et y sont les coordonnées rectangles d'une courbe plane, et z l'arc correspondant, on sait par le calcul différentiel, et je l'ai démontré rigoureusement dans *la Théorie des fonctions*, que l'on a

$$z' = \sqrt{(x'^2 + y'^2)},$$

en regardant x et y comme fonction d'une même variable quelconque.

Si on fait

$$f'\omega = a, \text{ on a } f''\omega = 0 \text{ et } f\omega = a\omega + b.$$

Les formules précédentes donneront

$$x = a\cos\omega, y = a\sin\omega, z = a\omega + b,$$

ce qui est le cas du cercle.

En prenant pour $f\omega$ des fonctions quelconques du $\sin\omega$ et $\cos\omega$, on aura autant de courbes algébriques qu'on voudra, dont la rectification sera algébrique aussi; problême sur lequel les géomètres se sont autrefois beaucoup exercés, et dont on peut voir

différentes solutions dans le tome V des nouveaux commentaires de Pétersbourg.

Les équations, dont nous venons de nous occuper, sont connues sous le nom d'équations qui ne satisfont pas aux conditions d'intégralité. On trouve des solutions élégantes de plusieurs de ces équations dans un mémoire de Monge, imprimé dans le Recueil de l'Académie des sciences pour l'année 1784.

La notation que nous avons employée pour désigner les fonctions dérivées de z, par rapport à chacune des variables x et y par des traits séparés par une virgule, est comme l'on voit très-simple et conforme à la nature de la chose; mais elle ne met pas en évidence les variables auxquelles chaque groupe de traits doit se rapporter, et si l'on avait des fonctions de plus de deux variables, la multitude des virgules pourrait rendre la notation incommode, et causer de la confusion par rapport aux variables, auxquelles les différentes fonctions dérivées répondraient.

On pourrait dans ces cas, employer avec avantage la notation que j'avais déjà proposée dans l'ouvrage, sur la Résolution des équations numériques (p 210) et qui dérive aussi de la nature de ce calcul.

En effet la formule donnée plus haut,

$$z' = x' z'' + y' z''$$

fait voir que si on veut considérer à part les dérivées

relatives à x et y, on a par rapport à x, $z' = x' z^{2}$; donc $z'^{2} = \frac{z'}{x'}$; ici z' ne doit être pris que par rapport à la variable t en tant qu'elle est renfermée dans la fonction x ; et pour indiquer ce point de vue, il n'y a qu'à enfermer l'expression $\frac{z'}{x'}$ entre deux crochets ; ce qui donnera

$$z'^{2} = \left(\frac{z'}{x'}\right).$$

On aura pareillement par rapport à y, $z' = y' z^{1}$; donc $z^{1} = \frac{z'}{y'}$ et renfermant l'expression $\frac{z'}{y'}$ entre deux crochets pour indiquer qu'ici la dérivée z' n'est relative à la variable t qu'autant qu'elle est renfermée dans y, on aura

$$z^{1} = \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

De cette manière, l'expression de la dérivée z' prendra cette forme

$$z' = x' \left(\frac{z'}{x'}\right) + y' \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

où l'on voit que $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ ne sont proprement que les coëficiens de x' et de y' dans l'expression de la dérivée z'

Comme la variable t dont on suppose que x et y sont fonctions demeure indéterminée, en la prenant pour x on aurait $x' = 1$; l'expression $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ deviendrait alors simplement (z'), et indiquerait comme elle le doit la fonction dérivée de z, par rapport à la variable principale x ; de même, en prenant y pour t, on aurait $y' = 1$, et l'expression $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ deviendrait aussi (z') et indiquerait la fonction dérivée de z par rapport à la variable principale y.

Mais pour distinguer ces fonctions l'une de l'autre, nous retiendrons toujours les lettres x' et y' sous z', et nous entendrons simplement par $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ les fonctions dérivées de z par rapport a x et y.

D'ailleurs cette manière d'exprimer les fonctions dérivées, a l'avantage de faciliter la transformation de ces fonctions lorsqu'on veut les rapporter à d'autres variables.

Ainsi comme l'expression $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ indique que z est regardé comme fonction de x, l'expression réciproque $\left(\frac{x'}{z'}\right)$ indiquerait que x serait regardé comme

fonction de z, et il est facile de se convaincre par la nature de ces expressions que l'on a en effet

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) \times \left(\frac{x'}{z'}\right) = 1,$$

comme si les parenthèses n'existaient pas, de sorte que l'on aura

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \left(\frac{1}{\frac{x'}{z'}}\right)$$

Si donc au lieu de regarder z comme fonction de x et y, on voulait regarder x comme fonction de z et y, on substituerait d'abord

$$\frac{1}{\left(\frac{z'}{x'}\right)} \quad \text{à la place de} \quad \left(\frac{z'}{x'}\right)$$

Ensuite, pour avoir la valeur de l'autre fonction dérivée $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ on remarquerait qu'ici la variable x est censée constante, puisque z n'est regardée que comme fonction de x.

Or x étant supposé fonction de y et z, on aura, en général,

$$x' = \left(\frac{x'}{y'}\right) y' + \left(\frac{x'}{z'}\right) z'$$

donc pour que x soit constante, x' devra être zéro, ce qui donnera l'équation

$$\left(\frac{x'}{y'}\right) y' + \left(\frac{x'}{z'}\right) z' = 0$$

d'où l'on tire

$$\frac{z'}{y'} = - \frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}$$

et cette valeur de $\frac{z'}{y'}$ tirée de la supposition de x constante, sera par conséquent la même que celle de

$$\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

D'où il suit que l'on aura ces transformées

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}, \quad \left(\frac{z'}{y'}\right) = - \frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}$$

De sorte que si l'on a une équation qui contienne

x, y, z avec les fonctions dérivées $\left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)$, elle ne changera pas essentiellement par les substitutions précédentes; seulement au lieu que z est supposé fonction de x et y, ce sera x qui sera fonction de y et z, et ainsi par les cas semblables.

Maintenant puisque $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ est une fonction de x et y, on aura de même en prenant sa dérivée relativement à t

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)' = x'\left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{x'}\right) + y'\left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{y'}\right);$$

mais comme x' et y' entre les parenthèses n'ont qu'une signification de convention, on peut sans inconvénient écrire

$$\left(\frac{z''}{x'}\right), \quad \left(\frac{z'\eta}{x'y'}\right)$$

à la place de

$$\left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)}{x'}\right) \quad \left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{y'}\right)$$

et par conséquent

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)' = x' \left(\frac{z''}{x'^2}\right) + y' \left(\frac{z''}{x'y'}\right).$$

On aura de même

$$\left(\frac{z'}{y'}\right)' = x' \left(\frac{z''}{x'y'}\right) + y' \left(\frac{z''}{y'^2}\right)$$

où l'on voit que

$$\left(\frac{z''}{x'^2}\right), \quad \left(\frac{z''}{x'y'}\right), \quad \left(\frac{z''}{y'^2}\right)$$

sont ici ce que nous avions dénoté plus haut par les signes

$$z'^1, \; z'^2, \; z'^3;$$

ensorte que la dérivée seconde de z sera représentée ainsi

$$z'' = x'' \left(\frac{z'}{x'}\right) + y'' \left(\frac{z}{y'}\right)$$

$$+ x'^2 \left(\frac{z''}{x'^2}\right) + 2 x'y' \left(\frac{z''}{x'y'}\right) + y'^2 \left(\frac{z''}{y'^2}\right)$$

où l'on voit que

$$\left(\frac{z''}{x'^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{z''}{y'^2}\right)$$

sont aussi les coëficiens de x'^2 et y'^2 dans l'expression complète de z'', mais que $\left(\frac{z''}{x'y'}\right)$ n'est plus le simple coëficient de $x'\,y'$ dans la même expression, comme on serait porté à le supposer d'après sa notation.

En général l'expression

$$\left(\frac{z^{(m+n)}}{x'^{m}\,y'^{n}}\right)$$

dénotera ce que nous avions dénoté par $z^{(m,n)}$ c'est-à-dire la fonction dérivée de z de l'ordre

$$(n+m)^{ième}$$

prise m fois relativement à x, et n fois relativement à y.

Cette dernière notation se rapproche, comme l'on voit, de celle qui est depuis long-tems en usage chez les Analistes pour désigner les différences qu'on appelle partielles.

En effet, il est visible que les fonctions dérivées que nous désignons ici

$$\left(\frac{z'}{x'}\right),\quad \left(\frac{z'}{y'}\right),\quad \left(\frac{z''}{x'^2}\right),\quad \left(\frac{z''}{x'y'}\right)\quad \text{etc.},$$

ne sont autre chose que les quantités

$$\frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy},\quad \frac{d^2z}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dx\,y}\quad \text{etc.}$$

que plusieurs géomètres, à l'exemple d'Euler, renferment aussi entre deux parenthèses.

Ainsi l'on aura en général les notations correspondantes,

$$z^{(m),(n)} = \left(\frac{z^{(m+n)}}{x'^{m}\, y'^{n}} \right) = \left(\frac{d^{(m+n)} z}{dx^{m}\, dy^{n}} \right)$$

Considérons maintenant une équation quelconque entre les trois variables x, y et z, par laquelle z soit une fonction déterminée de x et y.

Représentons cette équation par $F(x, y, z) = o$, et supposons pour un moment que x et y soient des fonctions données d'une même variable t, alors z sera aussi une fonction de t dépendante de l'équation proposée : et par la théorie des équations dérivées, exposée dans les leçons précédentes, non-seulement la fonction

$$F(x, y, z)$$

sera nulle, mais encore ses dérivées

$$F'(x, y, z),\ F''(x, y, z) \text{ etc.},$$

prises relativement à t seront nulles.

Or, en conservant la notation de la leçon VI, on a

$$F'(x, y, z) = x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z),$$

dans cette formule x', y', z' sont les fonctions dérivées de x, y, z par rapport à t, et

$$F'(x),\quad F'(y), F'(z)$$

sont les fonctions dérivées de

$$F(x, y, z)$$

prises par rapport à chacune des variables x, y, z en particulier.

Ainsi l'équation

$$F(x, y, z) = o$$

donnera celle-ci

$$x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z) = o$$

Mais, en considérant z comme fonction de x et y, on a

$$z' = x' z'' + y' z''$$

donc substituant, on aura

$$x' \left(F'(x) + z'' F'(z)\right) + y' \left(F'(y) + z'' F'(z)\right) = o$$

Pour que les fonctions x et y de t demeurent indéterminées, il faudra que leurs fonctions dérivées x' et y' disparaissent de l'équation précédente ; ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant les deux équations séparées

$$F'(x) + z'' F'(z) = o,$$

$$F'(y) + z'' F'(z) = o$$

Il est visible que ces deux équations ne sont autre chose que les dérivées de l'équation primitive

$$F(x, y, z) = o,$$

prises séparément par rapport à x et par rapport à y.

En effet, puisque dans cette équation, les deux

variables x et y sont essentiellement indépendantes entr'elles, ses dérivées par rapport à x et par rapport à y auront lieu chacune en particulier. Or, la variable z étant par cette équation une fonction de x et y, dont les fonctions dérivées sont $z'^{,}$ par rapport à x seul, et $z^{,\prime}$ par rapport à y seul, il est clair que la dérivée de

$$F(x, y, z) \text{ sera } F'(x) + z'^{,} F'(z)$$

par rapport à x, et qu'elle sera

$$F'(y) + z^{,\prime} F'(z)$$

par rapport à y; de sorte que l'équation primitive

$$F(x, y, z) = 0$$

donnera ces deux dérivées indépendantes,

$$F'(x) + z'^{,} F'(z) = 0$$

$$F'(y) + z^{,\prime} F'(z) = 0$$

lesquelles serviront à trouver les valeurs des fonctions $z'^{,}$ et $z^{,\prime}$, et l'on aura

$$z'^{,} = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad z^{,\prime} = -\frac{F'(y)}{F'(z)}$$

Ayant ainsi les valeurs des deux premières fonctions dérivées de z, on en déduira celles des fonctions secondes $z''^{,}$, $z'^{,\prime}$, $z^{,\prime\prime}$; en prenant les dérivées de $z'^{,}$ et $z^{,\prime}$ par rapport à x et y; et ainsi de suite.

Il suit de-là que l'équation primitive

$$F(x, y, z) = o$$

ayant lieu, ses deux dérivées

$$F'(x) + z'' F'(z) = o \text{ et } F'(y) + z'' F'(z) = o$$

auront lieu aussi en même tems; par conséquent une combinaison quelconque de ces trois équations aura lieu aussi, et pourra tenir lieu de l'équation primitive.

Ainsi une équation entre x, y, z et les deux dérivées

$$z', z'' \text{ ou } \left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

par rapport à x et y sera une équation du premier ordre à trois variables, à laquelle repondra nécessairement une équation primitive en x, y, z.

Soit, par exemple, l'équation

$$z'' + M z'' = N.$$

M et N étant des quantités constantes.

Son équation primitive sera

$$z - N x = \varphi (y - M x)$$

la caractéristique φ dénotant une fonction quelconque.

En effet si on prend les fonctions dérivées par rapport à x, on a

$$z'' - N = - M \varphi' (y - M x)$$

Et si on prend ces fonctions par rapport à y, on a

$$z'' = \varphi'(y - Mx);$$

de sorte qu'en éliminant la fonction dérivée φ', on a l'équation dérivée

$$z'' + M z' - N = 0.$$

Considérons l'équation générale de la même forme dans laquelle M et N soient des fonctions quelconques données de x, y, z.

Supposons que $F(x, y, z) = 0$, soit son équation primitive, on aura par ce qu'on a vu ci-dessus

$$z' = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \quad z'' = -\frac{F'(y)}{F'(z)};$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation proposée et multipliant tous les termes par $F'(z)$, on aura, en changeant les signes,

$$F'(x) + M F'(y) + N F'(z) = 0$$

Or on a, en général, comme on l'a vu

$$F'(x, y, z) = x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z)$$

en regardant x, y, z comme des fonctions quelconques d'une autre variable t; donc substituant, dans cette formule, à la place de $F'(x)$ sa valeur tirée de l'équation précédente, savoir

$$-M F'(y) - N F'(z);$$

on aura

$$F'(x, y, z) = (y' - x' M) F'(y) + (z' - x' N) F'(z).$$

On voit par cette expression de la fonction dérivée $F'(x, y, z)$ que cette fonction deviendra nulle si on établit entre les trois variables x, y, z des relations, telles que l'on ait ces deux équations particulières,

$$y' - M x' = 0, \quad z' - N x' = 0$$

Ces équations étant entre les trois variables x, x, z, serviront à déterminer les valeurs de ces variables en fonctions de la troisième; de sorte que par la substitution de ces valeurs la fonction $F(x, y, z)$ deviendra aussi une fonction de cette troisième variable. Donc puisque sa fonction dérivée doit alors devenir nulle, il s'ensuit que la variable doit disparaître d'elle-même, et que la fonction $F(x, y, z)$, ne pourra contenir, après cette substitution, que des constantes.

Or les deux équations

$$y' - x' M = 0, \quad z' - y' N = 0$$

étant du premier ordre, leurs équations primitives contiendront deux constantes arbitraires que nous désignerons par a et b. En effet, si de ces deux équations on veut éliminer par exemple la variable z, on tombera dans une équation du second ordre en x et y, dans laquelle on pourra faire $x' = 1$, ou $y' = 1$, suivant qu'on voudra regarder y comme fonction de x, ou x comme fonction de y, et cette équation aura pour équation primitive, une équation en x et y, avec deux constantes arbitraires.

Ensuite

Ensuite on aura aussi z en fonction de x et y par l'une des deux équations proposées.

Il s'ensuit de-là qu'après la substitution des valeurs de y et z en x, tirées des deux équations du premier ordre dont il s'agit, la fonction $F(x)\ y, z$ ne contiendra plus que les constantes a et b avec les constantes contenues dans les quantités M et N. De sorte qu'elle deviendra simplement une fonction de a et b que nous désignerons par $\Phi(a, b)$.

Par conséquent l'équation primitive $F(x, y, z) = o$ se réduira à $\Phi(a, b) = o$, par laquelle on voit que l'une des constantes a, b sera fonction de l'autre.

Mais à la place des constantes a, b, on peut mettre leurs valeurs en x, y, z, tirées des deux équations primitives, où elles entrent comme arbitraires. Donc si on désigne par P et Q ces valeurs de a et b, l'équation primitive de la proposée deviendra

$$\Phi(P, Q) = o,$$

la fonction Φ étant arbitraire.

Ainsi lorsqu'on est conduit à une équation quelconque du premier ordre à trois variables x, y, z, dans laquelle les deux fonctions dérivées de la variable qui est censée fonction des deux autres ne se trouvent qu'à la première dimension, telle que

$$z'y + M z y' = N$$

ou ce qui est la même chose

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)_{x} + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N,$$

M et N étant des fonctions quelconques de x, y, z; on pourra parvenir à l'équation primitive, par le moyen des deux équations

$$y' - M x' = 0, \quad z' - N x' = 0$$

dans lesquelles on peut faire l'une des trois fonctions dérivées x', y', z' égales à l'unité suivant la variable qu'on voudra regarder comme principale, et dont les deux autres seront censées des fonctions.

Car il n'y aura qu'à trouver, s'il est possible, les deux équations primitives de ces dernières équations, et en déduire les valeurs P, et Q des deux constantes arbitraires a et b qu'elles doivent renfermer. On aura alors $\Phi(P, Q) = o$ pour l'équation primitive cherchée; d'où résulte $Q = \varphi P$, la caractéristique φ désignant une fonction quelconque de Q.

L'analyse précédente est plus simple et plus directe que celle que j'ai donnée dans la Théorie des fonctions (N°. 101); c'est ce qui m'a engagé à la mettre ici, d'autant qu'elle s'applique avec la même facilité aux équations semblables entre un plus grand nombre de variables. Dans les mémoires de Berlin

de 1779, je m'étais contenté de prouver à *posteriori* la légitimité et la généralité de cette méthode.

Soit donc l'équation à quatre variables t, x, y, z, de la forme

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

L, M, N, étant des fonctions quelconques de t, x, y, z.

Si on représente son équation primitive par

$$F(t, x, y, z) = 0;$$

sa fonction dérivée

$$F'(t, x, y, z)$$

sera en général

$$t' F'(t) + x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z),$$

et l'on aura relativement à chacune des variables t, x, y en particulier, les équations

$$F'(t) + \left(\frac{z'}{t'}\right) F'(z) = 0,$$

$$F'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z) = 0,$$

$$F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z) = 0,$$

Tirant de ces équations les valeurs des fonctions

$$\left(\frac{z'}{t'}\right),\ \left(\frac{z'}{x}\right),\ \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

et les substituant dans l'équation proposée, elle deviendra après la multiplication par $F'(z)$, et le changement des signes

$$F'(t) + L F'(x) + M F'(y) + N F'(z) = 0$$

d'où l'on tire

$$F'(t) = -L F'(x) - M F'(y) - N F'(z)$$

Cette valeur de $F'(t)$ étant substituée dans celle de

$$F'(t, x, y, z)$$

on aura

$$F'(t, x, y, z) = (x' - t' L) F'(x)$$
$$+ (y' - t' M) F'(y) + (z' - t' N) F'(z).$$

Si donc on introduit entre les quatre variables

$$t, x, y, z$$

les relations déterminées par les trois équations

$$x' - t' L = 0$$

$$y' - t' M = 0$$

$$z' - t' N = 0$$

la fonction dérivée

$$F'(t, x, y, z)$$

deviendra nulle ; par conséquent la fonction primitive

$$F(t, x, y, z)$$

ne pourra contenir que des constantes.

Or les trois équations dont il s'agit étant du premier ordre, auront trois équations primitives qui contiendront trois constantes arbitraires a, b, c, et par lesquelles trois des variables t, x, y, z, pourront être déterminées en fonctions de la quatrième. Donc si dans la fonction

$$F(t, x, y, z)$$

on substitue les valeurs de ces variables, il faudra que la variable restante disparoisse d'elle-même, et la fonction ne pourra plus contenir que les mêmes constantes a, b, c, avec les constantes qui entreront dans les expressions de L, M, N. De sorte qu'après cette substitution, la fonction

$$F(t, x, y, z)$$

deviendra necessairement de la forme

$$\Phi(a, b, c).$$

Or les trois équations primitives, dont il s'agit, déterminent les valeurs de a, b, c, en fonctions des variables t, x, y, z ; de sorte qu'en désignant ces fonctions par P, Q, R on peut mettre ces équations sous la forme

$$a = P, \quad b = Q, \quad c = R.$$

Donc la fonction

$$F(t, x, y, z)$$

devra être de la forme

$$\Phi (P, Q, R),$$

puisqu'il n'y a que cette forme qui puisse devenir fonction de a, b, c, en vertu des trois équations primitives

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c.$$

Donc l'équation primitive

$$F(t, x, y, z) = 0$$

deviendra

$$\Phi (P, Q, R) = 0$$

par laquelle on aura

$$R = \varphi (P, Q),$$

la caractéristique φ désignant une fonction quelconque de P et Q.

Ainsi 1° l'équation du premier ordre à trois variables

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M \left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

depend des deux équations du premier ordre entre les mêmes variables

$$y' - x' M = o, \quad z' - x' N = o$$

et si $P = a$, $Q = b$, sont les équations primitives de celles-ci, a, et b étant les constantes arbitraires, l'équation primitive de la proposée, sera

$$Q = \varphi P$$

φP étant une fonction quelconque de P

2° L'équation du premier ordre à quatre variables

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

dépend de ces trois équations entre les mêmes variables

$$x' - t' L = o$$

$$y' - t' M = o$$

$$z' - t' N = o$$

Et si $P = a$, $Q = b$, $R = c$

sont les trois équations primitives de celles-ci, a, b, c, étant les constantes arbitraires, l'équation primitive de la proposée, sera

$$R = \varphi(P, Q)$$

$\varphi(P, Q)$ désignant une fonction quelconque de P et Q;

Et ainsi de suite.

De cette manière la recherche des équations primitives des équations du premier ordre par lesquelles

une variable est fonction de deux ou de plusieurs autres, est réduite à la recherche des équations primitives d'équations du même ordre, dans lesquelles toutes les variables sont fonctions d'une seule et même variable. Or en analise, on regarde la solution d'un problême, comme connue, lorsqu'elle est réduite à celle d'un problême d'un genre inférieur, quoique celle-ci puisse être sujette encore à beaucoup de difficultés.

Supposons pour donner des exemples très-simples que les quantités L, M, N soient constantes, les deux équations

$$y' - x' M = o, \quad z' - x' N = o$$

auront ces primitives

$$y - M x = a, \quad z - N x = b$$

donc l'équation

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

aura cette primitive

$$z - N x = \varphi(y - M x)$$

comme nous l'avons déjà vu plus haut.

Les trois équations

$$x' - t' L = o, \; y' - t' M = o, \; z' - t' N = o$$

auront ces primitives

$$x - L t = a, \; y - M t = b, \; z - N t = c$$

et

et l'équation

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

aura cette primitive

$$z - N t = \varphi(x - L t, y - M t).$$

Il est bon de remarquer que les équations

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c, \text{ etc,}$$

où a, b, c, etc, sont des constantes arbitraires, donnent chacune une solution particulière de l'équation proposée; ce qui est évident par la forme même de la solution générale

$$\Phi(P, Q) = 0 \quad \text{ou} \quad \Phi(P, Q, R) = 0;$$

car puisque la fonction désignée par Φ est arbitraire, on peut toujours reduire ces équations à

$$P - a = 0, \quad Q - b = 0, \quad R - c = 0 \text{ etc.}$$

Ainsi, il est facile de voir que l'équation $z - Nx = b$ satisfait à l'équation

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

car elle donne

$$z = N, x + b$$

donc

$$\left(\frac{y'}{x'}\right) = N, \quad \left(\frac{z'}{y'}\right) = 0.$$

Mais si on prenait l'autre équation

$$y - Mx = a$$

on ne verrait pas d'abord comment elle y peut satis-

faire puisque la variable z n'y entre pas. Comme cette équation ne donne qu'un rapport entre x et y par lequel x est fonction de y, ou y fonction de x, il faudra changer l'équation dérivée de manière qu'au lieu des fonctions dérivées de z, par rapport à x et y, elles contiennent les fonctions dérivées de x par rapport à y, z, ou de y par rapport à x, z; ce qu'on obtiendra par les substitutions que nous avons indiquées, plus haut.

On mettra donc à la place de

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) \text{ et } \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

les quantités

$$\frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}, \quad -\frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}$$

et l'équation dérivée deviendra, en multipliant tous les termes par $\left(\frac{x'}{z'}\right)$,

$$1 - M\left(\frac{x'}{y'}\right) = N\left(\frac{x'}{z'}\right)$$

dans laquelle x est maintenant censée fonction de y et z.

Or l'équation

$$y - Mx = a$$

donne

$$x = \frac{y - a}{M};$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{x'}{y'}\right) = \frac{1}{M}, \left(\frac{x'}{z'}\right) = 0,$$

valeurs qui satisfont évidemment à l'équation précédente.

Nous venons de voir dans les exemples précédens, que l'équation primitive renferme dans le cas de trois variables une fonction arbitraire d'une quantité composée de ces variables, et dans le cas de quatre variables une fonction arbitraire de deux quantités composées de ces variables.

Nous allons démontrer que cette proposition est générale, quelle que soit la forme de l'équation dérivée du premier ordre.

En appliquant aux équations à trois variables, la Théorie que nous avons donnée dans la leçon XII, sur les équations dérivées à deux variables, il est aisé de voir que puisqu'une équation à trois variables a deux équations dérivées, on pourra, par le moyen de ces trois équations, qui ont lieu simultanément, éliminer deux constantes à volonté, et parvenir ainsi à

une équation du premier ordre, qui contiendra deux constantes de moins que l'équation primitive.

D'où il suit réciproquement que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables, doit contenir deux constantes de plus que l'équation du premier ordre, et que ces constantes seront nécessairement arbitraires.

Prenons pour équation primitive, l'équation à trois variables

$$z = a\,x + b\,y$$

En regardant z comme fonction de x et y, on aura ces deux dérivées, l'une relative à x et l'autre relative à y

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = a, \text{ et } \left(\frac{z'}{y'}\right) = b$$

Eliminant, par le moyen de ces trois équations, les constantes a et b, on aura l'équation du premier ordre

$$z = x\,\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\,\left(\frac{z'}{y'}\right)$$

à laquelle répondra l'équation primitive

$$z = a\,x + b\,y$$

les constantes a et b demeurant arbitraires.

Mais il n'en est pas ici comme dans les équations à deux variables, où dès qu'on a trouvé une équation primitive, avec une constante arbitraire, on est assuré qu'elle a toute la généralité que l'équation du pre-

mier ordre peut comporter; car on peut trouver une infinité d'équations à trois variables, qui par l'élimination de deux constantes, au moyen de leurs dérivées, donnent la même équation du premier ordre.

Par exemple, l'équation

$$z = a\,y + \frac{b\,x^2}{y}$$

donne ces deux dérivées

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{2\,b\,x}{y}, \quad \left(\frac{z'}{y'}\right) = a - \frac{b\,x^2}{y}$$

d'où l'on tire, par l'élimination de a et b, la même équation

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

On pourra trouver autant d'autres équations primitives, qu'on voudra, qui redonneront la même équation du premier ordre ; mais dès qu'on en a une avec deux constantes arbitraires, on peut en déduire la formule générale de toutes les autres, par des principes analogues à ceux qui nous ont conduit aux équations primitives singulières, et que nous avons exposés dans la leçon XV.

En effet, si l'on considere une équation primitive à trois variables, telle que

$$F(x, y, z, a, b) = o$$

dans laquelle il y a deux constantes a et b qu'on se propose de faire disparaître au moyen de ses deux dérivées, il est visible que le résultat de l'élimination de ces constantes sera toujours le même, soit que les quantités a et b soient constantes ou non, pourvu que les deux dérivées soient les mêmes; ce qui aura nécessairement lieu lorsqu'en regardant les quantités a et b, comme variables, les termes provenant de leur variation, dans les deux équations dérivées, seront nuls.

Or tant que a et b sont constans, l'équation

$$F(x, y, z, a, b) = o$$

donne, comme on l'a vu plus haut, ces deux dérivées, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y,

$$F'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z) = o$$

$$F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z) = o .$$

Mais, en regardant a et b comme fonctions de x et y, ces dérivées deviendront

$$F(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z)$$

$$+ \left(\frac{a'}{x'}\right) F'(a) + \left(\frac{b'}{x'}\right) F'(b) = 0,$$

$$F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z)$$

$$+ \left(\frac{a'}{y'}\right) F'(a) + \left(\frac{b'}{y'}\right) F'(b) = 0.$$

Et il est clair qu'elles se réduiront aux précédentes en déterminant a et b de manière que l'on ait les deux équations

$$\left(\frac{a'}{x'}\right) F'(a) + \left(\frac{b'}{x'}\right) F'\ b) = 0,$$

$$\left(\frac{a'}{y'}\right) F'(a) + \left(\frac{b'}{y'}\right) F'(b) = 0.$$

Il est d'abord visible qu'on peut satisfaire à ces deux conditions, en faisant

$$F'(a) = 0, \quad \text{et} \quad F'(b) = 0$$

ce qui donne deux équations, par lesquelles on pourra déterminer a et b, en fonctions de x, y, z.

Cette solution répond évidemment à celle qui donne les équations primitives singulières des équations à deux variables, comme nous l'avons vu dans la leçon XV.

Ainsi, on pourra appeler, de même, *équation primitive singulière*, l'équation

$$F(x, y, z, a, b) = o$$

dans laquelle on aura substitué pour a et b les valeurs tirées des deux équations

$$F'(a) = o, \quad F'(b) = o.$$

Mais il y a une manière plus générale de satisfaire aux mêmes conditions.

Supposons que b soit une fonction quelconque de a, que nous désignerons par $\varphi\, a$, alors b' deviendra

$$\varphi'(a)\, a',$$

par conséquent

$$\frac{b'}{x'}\ )$$

deviendra

$$\varphi'(a) \times \left(\frac{a'}{x'}\right), \text{ et } \left(\frac{b'}{y'}\right)$$

deviendra

$$\varphi'(a) \times \left(\frac{a'}{y'}\right).$$

Faisant ces substitutions dans les deux équations de conditions, elles deviendront

$$\left(F'(a) + F'(b) \times \varphi' a\right)\left(\frac{a'}{x'}\right) = o,$$

(F'

$$\left(F'(a) + F'(b) \times \varphi' a \right) \left(\frac{a'}{y'} \right) = 0 ;$$

et on y satisfera par cette équation unique

$$F'(a) + F'(b) \times \varphi' a = 0$$

laquelle servira à déterminer la valeur de a, et la fonction φa demeurera arbitraire.

En effet, si dans l'équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

on fait

$$b = \varphi a,$$

elle deviendra

$$F(x, y, z, a, \varphi a) = 0,$$

et si on désigne par

$$F'(a, \varphi a)$$

la fonction dérivée de

$$F(x, y, z, a, \varphi a)$$

prise relativement à a seul, il est facile de voir qu'en faisant

$$F'(a, \varphi a) = 0$$

les équations dérivées de la proposée, prises relativement à x et à y, seront les mêmes, a étant variable, que si elle nevariait pas ; que par conséquent l'équation du premier ordre déduite de celle-ci par l'élimination de a et φa, sera encore la même.

Il est visible que l'équation

$$F'(a, \varphi a) = 0$$

n'est autre chose que l'équation ci-dessus

$F'(a) + F'(b) \times \varphi' a = 0$, en faisant $b = \varphi a$.

De cette manière on aura donc aussi une espèce d'équations primitives singulières, mais plus générales que l'équation primitive proposée, à raison de la fonction arbitraire qu'elles contiendront.

Si donc on a une équation du premier ordre, à trois variables, telle que

$$F\left(x, y, z, \left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right) = 0$$

On peut supposer qu'elle ait pour équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

où a et b soient deux constantes arbitraires.

Nous appellerons celle-ci *équation primitive complette* à raison des deux constantes arbitraires qu'elles contient, et qui ne peuvent disparaître que par le moyen de ses deux dérivées. S'il arrivait que les deux constantes s'en allassent à-la-fois au moyen d'une seule de ces dérivées, elles ne pourraient alors tenir lieu que d'une seule constante, et l'équation primitive ne serait pas complette.

Dès qu'on aura trouvé une équation primtive complette, on en pourra déduire une autre plus générale, et qui contiendra une fonction arbitraire.

Car il n'y aura qu'à faire $b = \varphi\, a$, et déterminer ensuite a par la condition

$$F'\,(a,\ \varphi\, a) = o.$$

Nous nommerons celle-ci *équation primitive générale*, pour la distinguer de la précédente.

Enfin, la même équation primitive complette donnera encore *l'équation primitive singulière*, en déterminant a et b en fonctions de x, y, z, par les deux conditions

$$F'\,(a) = o, \quad F'\,(b) = o$$

Par exemple, nous avons vu, plus haut, qne l'équation du premier ordre

$$z = x\,(\frac{z'}{x'}) + y\,(\frac{z'}{y'})$$

a pour équation primitive, complette

$$z = a\,x + b\,y.$$

Pour en déduire l'équation primitive générale, on fera $b = \varphi\, a$, et on prendra les fonctions dérivées par rapport à a seul, on aura les deux équations

$$z = a\,x + y\,\varphi\, a,$$
$$x + y\,\varphi'\, a = o$$

d'où il faudra éliminer a : comme la fonction φa est arbitraire, on peut, en lui donnant différentes formes, en déduire une infinité d'équations primitives complettes, différentes, avec deux constantes arbitraires.

Soit, par exemple, $\varphi a = A - \frac{a^2}{4B}$ les deux équations

deviendront

$$z = ax + y\left(A - \frac{a^2}{4B}\right),$$

$$x - \frac{ya}{2B} = 0$$

la seconde donne $a = \frac{2Bx}{y}$, et cette valeur substituée dans la première, la réduit à

$$z = Ay + \frac{Bx^2}{y}$$

qui est l'autre forme d'équation primitive que nous avions trouvée.

On pourra, de la même manière, en trouver tant d'autres qu'on voudra ; mais il est remarquable que la première équation primitive, complette, d'où l'équation primitive générale a été déduite, n'y est jamais comprise.

Ainsi, il est impossible de déterminer la fonction $\varphi\, a$, de manière que les deux équations

$$z = a\, x + y\, \varphi\, a$$

$$x + y\, \varphi'\, a = 0$$

donnent celle-ci

$$z = \mathrm{A}\, x + \mathrm{B}\, y$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Car, supposons la chose possible, en substituant, dans la première, la valeur de z, on aura à satisfaire à deux équations

$$\mathrm{A}\, x + \mathrm{B}\, y = a\, x + y\, \varphi\, a$$

$$x + y\, \varphi'\, a = 0.$$

La seconde donne $x = -y\, \varphi'\, a$; cette valeur substituée dans la première, la rend divisible par y, et il en résulte

$$\mathrm{B} - \mathrm{A}\, \varphi'\, a = \varphi\, a - a\, \varphi'\, a,$$

d'où l'on tire

$$\varphi'\, a = \frac{\varphi\, a - \mathrm{B}}{a - \mathrm{A}}$$

divisant par $\varphi\, a - \mathrm{B}$, on a l'équation

$$\frac{\varphi'\, a}{\varphi\, a - \mathrm{B}} = \frac{1}{a - \mathrm{A}}$$

dont chaque membre est une fonction dérivée exacte.

La fonction primitive du premier membre est $l(\varphi a - B)$ et celle du second membre, est $l(a - A)$, la caractéristique l dénotant le logarithme hyperbolique (leçon IV); donc prenant les fonctions primitives, et ajoutant la constante arbitraire $l\,k$, on aura

$$l(\varphi a - B) = l(a - A) + l\,k$$

d'où l'on tire

$$\varphi a - B = k(a - A)$$

et par conséquent

$$\varphi a = B + k(a - A).$$

Telle devrait donc être la forme de la fonction φa; d'où l'on déduit $\varphi' a = k$. Ces valeurs étant maintenant substituées dans les deux équations ci dessus, elles deviendront

$$(a - A)(x + k y) = 0$$

$$x + k y = 0$$

auxquelles on ne peut satisfaire qu'en faisant $x + ky = 0$, ce qui ne donne rien.

Jusqu'à présent on avait cru que toute équation primitive qui satisfait à une équation du premier ordre à trois variables, avec une fonction arbitraire, est aussi générale que celle-ci peut le comporter. L'exemple précédent met cette proposition en défaut, et nous prouverons, plus bas, la même chose d'une manière générale et directe.

Il est vrai que dans le cas que nous venons d'examiner, on peut donner à l'équation primitive une forme plus simple et plus générale.

Car, en considérant les deux équations

$$z = ax + y\,\varphi a$$

$$x + y\,\varphi' a = 0$$

on voit que la seconde donne

$$\varphi' a = -\frac{x}{y};$$

d'où il résulte que a est une fonction de $\frac{x}{y}$.

Faisons donc

$$a = \psi\left(\frac{x}{y}\right);$$

nous aurons

$$\varphi a = \Phi\left(\frac{x}{y}\right);$$

mais il faudra qu'il y ait entre les fonctions $\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$ une relation dépendante de l'équation

$$\varphi' a = -\frac{x}{y}.$$

En effet, si en regardant a comme une variable, on prend les fonctions dérivées relativement à la quantité $\frac{x}{y}$, les équations

$$a = \psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \varphi a = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donneront

$$a' = \psi'\left(\frac{x}{y}\right), \quad a'\varphi' a = \Phi'\left(\frac{x}{y}\right)$$

donc, substituant dans la seconde pour a' et $\varphi' a$, leurs valeurs, on aura l'équation de condition

$$\frac{x}{y}\,\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \Phi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Maintenant la premiere, équation, devient par la substitution des valeurs de a et de φa,

$$z = x\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Et si l'on met cette équation, sous la forme

$$z = x\left(\psi\left(\frac{x}{y}\right)\frac{y}{x} + \Phi\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

il est visible qu'elle se réduit à celle-ci

$$z = x\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

La fonction $\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$,

demeure absolument arbitraire, puisque les deux fonctions

$$\psi\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{y}{x}\,\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

ne forment qu'une fonction de $\frac{y}{x}$; ensorte que la relation, trouvée entre ces fonctions, devient ici inutile.

Et il est bon de remarquer que cette dernière solution est précisément celle que l'on trouve directement par la méthode générale exposée plus haut pour les équations du premier ordre de la forme

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N.$$

Car l'équation proposée

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right)$$

étant divisée par x et comparée à la formule précédente, donne

$$M = \frac{y}{x}, \quad N = \frac{z}{x}$$

de sorte que les deux équations particulières

$$y' - M x' = 0 \quad \text{et} \quad z' - N x' = 0$$

deviennent

$$y' - \frac{y\,x'}{x} = 0, \quad z' - \frac{z\,x'}{x} = 0$$

Chacune de ces deux équations étant divisées par x x devient une dérivée exacte, et l'on a les deux primitives

$$\frac{y}{x} = a, \qquad \frac{z}{x} = b$$

On a ainsi

$$P = \frac{y}{x}, \quad \text{et} \quad Q = \frac{z}{x}$$

d'où il résulte l'équation primitive

$$\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

qui s'accorde avec celle que nous venons de trouver.

On voit aussi que cette forme renferme l'équation complette

$$z = ax + by;$$

car il n'y a qu'à supposer

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = a + b\frac{y}{x}.$$

Si l'on avait l'équation du premier ordre

$$z = x\left(\frac{z'}{x}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right) + f\left(\left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right)$$

la caractéristique f dénotant une fonction quelconque donnée des deux fonctions dérivées

$$\left(\frac{z'}{x'}\right), \quad \left(\frac{z'}{y'}\right),$$

on trouverait aisément, pour son équation primitive complette, l'équation

$$z = ax + by + f(a, b)$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

En effet, en prenant les deux dérivées de cette équation par rapport à x et à y, on a

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = a, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right) = b$$

et substituant ces valeurs de a et b, il vient l'équation proposée.

Maintenant pour trouver l'équation primitive générale, il n'y aura qu'a faire $b = \varphi a$, et déterminer ensuite a par la dérivée, prise relativement à a seul.

Ainsi on aura le système des deux équations :

$$z = ax + y\varphi a + f(a, \varphi a)$$

$$x + y\varphi' a + f'(a, \varphi a) = o$$

Enfin pour avoir l'équation primitive singulière, on éliminera a et b au moyen des deux dérivées, l'une par rapport à a, et l'autre par rapport à b. Ces dérivées sont

$$x + f'(a) = o$$

$$y + f'(b) = o$$

Comme l'élimination de a et b est impossible tant qu'on ne particularise pas la fonction $f(a, b)$; si à la place des variables x et y, on introduit les deux variables a et b, on aura

$$x = -f'(a)$$
$$y = -f'(b)$$

et de-là

$$z = f(a, b) - a f'(a) - b f'(b)$$

pour l'équation primitive singulière.

Si on considère ces trois espèces d'équations primitives, il est facile de voir qu'elles sont essentiellement distinctes l'une de l'autre, et que chacune d'elles ne peut être renfermée dans aucune des deux autres, ni les renfermer; car dans la première, les quantités a et b sont constantes, au lieu qu'elles deviennent, dans la seconde et dans la troisième, des fonctions des variables x, y, z.

Mais on peut s'en convaincre d'une manière plus sensible par la considération des surfaces représentées par ces différentes équations primitives. Pour cela, je considère d'abord l'équation générale du plan

$$z = ax + by + c$$

dont la position par rapport aux trois plans rectangulaires des x, y, des x, z, et des y, z, est déterminée par les constantes b, c.

Car il est facile de prouver que a est la tangente de l'angle, que l'intersection de ce plan avec le plan des

x et z fait avec l'axe des x ; que b est la tangente de l'angle, que l'intesrection du même plan avec l'autre plan des y et z fait avec l'axe de y ; enfin que ce plan passe par le point de l'axe des z qui est éloigné de l'origine commune des trois axes, de la quantité c. Ainsi on peut regarder les quantités a, b, c, comme les élémens du plan, puisque sa position par rapport aux axes des x, y, z, en dépend entièrement.

Sf on combine l'équation du plan avec ses deux dérivées, prises séparement par rapport à x et à y, on peut déterminer les valeurs des trois élémens a, b, c, en fonctions de x, y, z, et l'on trouve

$$a = \left(\frac{z'}{x'}\right), b = \left(\frac{z'}{y'}\right),$$

$$c = z - x\left(\frac{z'}{x'}\right) - y\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

Or nous avons démontré rigoureusement dans la *Théorie des fonctions analytiques* que par rapport à une surface quelconque dont on a l'équation en x, y, z, les expressions précédentes des quantités a, b, c, donnent également les élémens du plan tangent de la surface dans le point qui répond aux co-ordonnées x, y, z ; d'où il s'ensuit que deux surfaces qui pour les mêmes co-ordonnées auront aussi les mêmes valeurs des fonctions

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) \text{ et } \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

se toucheront nécessairement dans le point qui répond à ces co ordonnées, puisqu'elles auront l'une et l'autre le même plan tangent.

Cela posé, l'équation primitive complette

$$F(x, y, z, a, b) = o$$

dans laquelle a et b sont des constantes arbitraires, représente une surface dont la nature ou la position dépend de ces constantes ; ensorte qu'en faisant varier ces constantes, la surface variera aussi nécessairement.

Or si on fait $b = \varphi a$ et qu'on détermine a en fonction de x, y, z, de manière que les deux équations dérivées restent les mêmes que si a ne variait pas, ce qui donne l'équation primitive générale, il est visible que cette équation représentera une surface tout-à-fait différente, mais qui aura dans chaque point le même plan tangent que si la quantité a demeurait constante, puisque les expressions des quantités

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) \text{ et } \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

restent les mêmes. Donc cette surface sera touchée dans chaque point par la surface de l'équation primitive complette, qui répond à $b = \varphi a$, et où a aura une

valeur constante, déterminée par l'équation

$$F'(a, \varphi a) = 0$$

qui est la condition de l'équation primitive générale ; les valeurs de x, y, z, dont a devient fonction, répondant au point de contact des deux surfaces.

Mais en regardant a comme constante, l'équation

$$F'(a, \varphi a) = 0$$

représente aussi une surface ; et son intersection avec la surface, représentée par

$$F(x, y, z, a, \varphi a) = 0$$

sera une ligne tracée sur cette même surface, dont chaque point sera par conséquent aussi un point de contact des deux surfaces dont il s'agit.

D'où l'on peut conclure que la surface représentée par l'équation primitive générale, sera touchée, dans toute l'étendue d'une ligne, par une des surfaces représentées par l'équation primitive complette, dans laquelle on supposera l'une des constantes $b = \varphi a$.

De manière que l'équation primitive complette

$$F(x, y, z, a, \varphi a) = 0$$

où a est constante, donnera, en faisant varier successivement la valeur de a, une infinité de surfaces successives dont chacune aura une ligne d'attouchement avec

la surface représentée par l'équation primitive générale; et il est aisé de concevoir que ces lignes ne pourront être que les intersections mutuelles des mêmes surfaces; que par conséquent la surface représentée par l'équation primitive générale, ne sera formée, elle-même, que par toutes ses intersections successives.

Maintenant il est évident que la nature de cette surface est subordonnée à la fonction φa, et qu'elle n'a de contact qu'avec celles des surfaces de l'équation primitive complette

$$F(x, y, z, a, b) = o$$

pour lesquelles $b = \varphi a$. Mais si en regardant a et b comme variables, on les détermine par les deux équations

$$F'(a) = o, \quad F'(b) = o$$

ce qui donne alors l'équation primitive singulière, la surface représentée par cette dernière équation sera touchée par la surface de l'équation primitive complette, dans laquelle a et b auront des valeurs constantes, puisque les valeurs des expressions

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

sont encore les mêmes, soit que a et b soient constans ou variables. Et les points d'attouchement pour des

des valeurs données de a et b seront déterminées par les deux équations

$$F'(a) = o, \quad F'(b) = o,$$

combinées avec l'équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = o;$$

de sorte que pour chaque valeur de a et b, il n'y aura qu'un point de contact déterminé. D'où il est aisé de conclure que la surface représentée, par l'équation primitive singulière, ne sera touchée dans chacun de ses points que par une des surfaces de l'équation primitive complette

$$F(x, y, z, a, b) = o;$$

mais qu'elle sera touchée par toutes les surfaces qui peuvent être représentées par cette équation, en donnant à a et b des valeurs constantes quelconques; de sorte qu'on pourra regarder cette même surface comme formée par l'intersection mutuelle et continuelle de toutes les surfaces dont nous parlons, en faisant varier successivement les valeurs des constantes a et b.

Cette Théorie n'est comme l'on voit qu'une généralisation de celle que nous avons donnée dans la leçon XVIII sur les courbes représentées par les équations primitives ordinaires ou singulières des équations du premier ordre à deux variables.

L'équation primitive complette

$$z = ax + by + f(a, b)$$

que nous avons traitée plus haut, représente comme l'on voit un plan dont la position dépend des deux constantes a et b.

Si on fait $b = \varphi a$, et qu'on détermine a par l'équation

$$x + y\varphi' a + f'(a, \varphi a) = o$$

pour avoir l'équation primitive générale, la surface représentée par cette équation sera touchée et formée par l'intersection mutuelle et successive de tous les plans représentés par l'équation

$$z = ax + y\varphi a + f(a, \varphi a)$$

en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles ; et cette surface sera développable dans le sens le plus étendu.

Mais si l'on détermine a et b par les deux équations

$$x + f'(a) = o, \quad y + f'(b) = o$$

ce qui donne l'équation primitive singulière, la surface représentée par cette dernière équation, sera formée et touchée par tous les plans qui peuvent être représentés par l'équation

$$z = ax + by + f(a, b)$$

en donnant successivement à a et b toutes les valeurs successives possibles.

Et toutes ces différentes surfaces seront représentées à-la-fois par l'équation du premier ordre

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right) + f\left(\left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right)$$

On peut voir, dans les écrits de Monge, la théorie de la génération des surfaces et des équations, qui peuvent les représenter, développées dans toute son étendue, et avec des considérations particulières et ingénieuses, qui lui appartiennent.

Ce que j'en ai dit ici n'est guère qu'un extrait de ce que j'avais donné dans les mémoires de Berlin de 1774 et 1779.

Lorsque l'équation du premier ordre est entre plus de trois variables, on pourra aussi la supposer déduite d'une équation entre ces mêmes variables, et autant de constantes arbitraires qu'il y aura de variables moins une ; car alors cette équation fournira autant d'équations dérivées qu'il y aura de constantes, par lesquelles on pourra, en éliminant ces constantes, parvenir à l'équation du premier ordre.

L'équation avec les constantes arbitraires sera donc l'équation primitive complette de l'équation du premier ordre ; et on en pourra déduire des équations primitives plus ou moins générales par la variation de ces constantes, en supposant l'une ou quelques-unes d'entr'elles, fonctions de toutes les autres, et les déterminant par les équations dérivées prises par rapport à chacune de celles-ci.

Enfin si, sans établir aucun rapport entre ces constantes, on les détermine toutes, par les équations dérivées prises par rapport à chacune d'elles en particulier, on aura l'équation primitive singulière. Car, par ces déterminations, les équations dérivées resteront les mêmes, et le résultat de l'élimination sera par conséquent le même que si les variables étaient demeurées constantes.

Ainsi l'équation entre quatre variables t, x, y, z, et trois constantes a, b, c,

$$F(t, x, y, z, a, b, c) = 0$$

sera la primitive complette de l'équation du premier ordre en t, x, y, z; et les trois fonctions dérivées

$$\left(\frac{z'}{t'}\right), \left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right),$$

déduites des trois dérivées prises par rapport à t, x, y

$$F'(t) + \left(\frac{z'}{t'}\right) F'(z) = 0$$

$$F'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z) = 0$$

$$F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z) = 0$$

en éliminant par leur moyen les trois constantes a, b, c.

De-là en regardant a, b, c, comme variables, et faisant $c = \varphi(a, b)$, on aura l'équation primitive générale par les deux équations dérivées relatives à a et b.

$$F'(a) + \varphi'(a) \times F'(c) = 0$$

$$F'(b) + \varphi'(b) \times F'(c) = 0$$

et si on fait à la fois $c = \varphi a$, $b = \psi a$, on aura une autre équation primitive moins générale, en déterminant a par l'équation relative à a

$$F'(a) + \psi' a \times F'(b) + \varphi' a \times F'(c) = 0.$$

Enfin on aura l'équation primitive singulière par les trois équations dérivées relatives à a, b, c,

$$F'(a) = 0, \; F'(b) = 0, \; F'(c) = 0.$$

On voit par-là qu'en général toute équation du premier ordre entre trois variables, dont une est censée fonction des deux autres, peut avoir pour équation primitive une équation entre ces mêmes variables, contenant une fonction arbitraire; que toute équation du premier ordre entre quatre variables, dont une sera censée fonction des trois autres, pourra avoir pour équation primitive une équation entre ces quatre variables, qui contenant une fonction arbitraire de deux quantités formées de ces variables, et ainsi de suite : l'introduction de ces fonctions arbitraires dans les équations primitives et leur évanouissement dans les équations dérivées, est le vrai caractère qui distingue les équations dérivées à plusieurs variables, de celles qui n'ont que deux va-

riables, et où l'équation primitive n'admet que des constantes arbitraires.

Nous avons donné plus haut une méthode directe pour trouver l'équation primitive de toute équation du premier ordre à un nombre quelconque de variables, lorsque les fonctions dérivées n'y passent pas le premier degré. On peut, par une considération fort simple que j'ai proposée il y a long-tems (Mémoires de Berlin de 1772), rendre toute équation du premier ordre à trois variables, susceptible de cette méthode. Mais il se présente alors dans l'application de la même méthode des difficultés qui ont échappé à ceux qui ont déjà fait cette application, et que je n'ai pas cherché à résoudre dans la *Théorie des fonctions*, en traitant le même sujet (art. 104), parce que je n'avais encore rien trouvé de satisfaisant. C'est ce qui m'engage à revenir sur cet objet pour n'y plus rien laisser à désirer.

Faisons pour plus de simplicité,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = p, \text{ et } \left(\frac{z'}{y'}\right) = q,$$

toute équation du premier ordre à trois variables sera représentée par

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

et l'on aura la formule

$$z' = p\,x' + q\,x'$$

à laquelle il faudra satisfaire par le moyen de l'une

des indéterminées p et q, l'autre étant donnée par l'équation du premier ordre.

Comme les quantités p et q ne peuvent être que des fonctions de x, y, z, si on suppose

$$p = -\psi(x, y, z), \quad q = -\varphi(x, y, z)$$

on aura l'équation

$$z' + x'\psi(x, y, z) + y'\varphi(x, y, z) = 0$$

qui ne peut avoir une équation primitive qu'autant que les fonctions désignées par ψ et φ satisferont à la condition

$$0 = \psi'(y) - \varphi'(x) + \varphi'(z) \times \psi(x, y, z) - \psi'(z) \times \varphi(x, y, z)$$

comme nous l'avons vu au commencement de cette leçon.

Or puisque

$$\psi(x, y, z) = -p \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, z) = -q,$$

on aura

$$\psi'(y) = -\left(\frac{p'}{y'}\right), \quad \psi'(z) = -\left(\frac{p'}{z'}\right)$$

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{q'}{x'}\right), \quad \varphi'(z) = -\left(\frac{q'}{z'}\right)$$

donc faisant ces substitutions, on aura pour l'équation de condition celle-ci du premier ordre

$$\left(\frac{q'}{x'}\right) - \left(\frac{p'}{y'}\right) + p\left(\frac{q'}{z'}\right) - q\left(\frac{p'}{z'}\right) = 0.$$

L'équation donnée

$$F(x, y, z, p, q) = o$$

fournit ces trois dérivées relatives à x, y, z,

$$F'(x) + F'(p) \times \left(\frac{p'}{x'}\right) + F'(q) \times \left(\frac{q'}{x'}\right) = o$$

$$F'(y) + F'(p) \times \left(\frac{p'}{y'}\right) + F'(q) \times \left(\frac{q'}{y'}\right) = o$$

$$F'(z) + F'(p) \times \left(\frac{p'}{z'}\right) + F'(q) \times \left(\frac{q'}{z'}\right) = o$$

par le moyen desquelles on pourra éliminer les fonctions dérivées de p ou de q.

Eliminons celle de p, on aura par la première et la troisième

$$\left(\frac{q'}{x'}\right) = -\frac{F'(x)}{F'(q)} - \frac{F'(p)}{F'(q)} \times \frac{p'}{x'}\Big)$$

$$\left(\frac{q'}{z'}\right) = -\frac{F'(z)}{F'(q)} - \frac{F'(p)}{F'(q)} \times \left(\frac{p'}{z'}\right)$$

et substituant ces valeurs dans l'équation du premier ordre, elle deviendra

$$F'(x) + pF'(z) + F'(p) \times \left(\frac{p'}{x'}\right)$$

+

$$+ F'(q) \times \left(\frac{p'}{y'}\right) + \left(p F'(p) + q F'(q)\right)\left(\frac{p'}{z'}\right) = 0,$$

où l'on voit que les fonctions dérivées de l'inconnue p ne sont qu'à la première dimension, la quantité q étant d'ailleurs une fonction de p, x, y, z, donnée par l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Lorsqu'on aura déterminé par ces équations les fonctions p et q, l'équation

$$z' = p\,x' + q\,y'$$

aura necessairement une équation primitive, qui sera en même tems l'équation primitive de l'équation du premier ordre proposée

$$F\left(x, y, z, \left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right) = 0.$$

Comparons maintenant l'équation ci-dessus qui contient les fonctions dérivées de p, relativement aux trois variables x, y, z, avec la formule

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

que nous avons déjà traitée dans cette leçon, et dont nous avons vu que l'équation primitive dépend des trois équations particulières

$$x' - t'L = o\,,\quad y' - t'M = o\,,\quad z' - t'N = o$$

nous aurons, en prenant respectivement les variables x, y, z, p, à la place des variables t, x, y, z, les valeurs

$$L = \frac{F'(q)}{F'(p)}\,,$$

$$M = \frac{p\,F'(p) + q\,F'(q)}{F'(p)}$$

$$N = -\frac{F'(x) + p\,F'(z)}{F'(p)}$$

de sorte que les trois équations particulières deviendront

$$y'\,F'(p) - x'\,F'(q) = o$$

$$z'\,F'(p) - x'\,\big(p\,F'(p) + q\,F'(q)\big) = o$$

$$p'\,F'(p) + x'\,\big(F'(x) + p\,F'(z)\big) = o.$$

Comme ces trois équations ne renferment que quatre variables x, y, z, p, chacune d'elles pourra être réduite à deux variables seulement ; ainsi la difficulté est rabaissée aux équations de ce genre.

Supposons donc qu'on ait trouvé leurs équations primitives qui renfermeront nécessairement trois constantes arbitraires a, b, c ; on pourra en tirer les valeurs de ces trois constantes en x, y, z, et p ; et si on dénote ces valeurs par P, Q, R, on aura sur le champ, comme nous l'avons démontré, l'équation

$$R = \varphi(P, Q)$$

pour l'équation primitive de l'équation du premier ordre en x, y, z et p ; la fonction $\varphi(P, Q)$ étant une fonction arbitraire quelconque de P et de Q.

Cette équation combinée avec l'équation donnée

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

donnera les valeurs de p et q en x, y, z, qui étant substituées dans l'équation

$$z' = p x' + q y'$$

la rendront susceptible d'une équation primitive en x, y, z, qui sera l'équation cherchée.

Comme jusqu'ici rien ne limite la fonction $\varphi(P, Q,)$ il s'ensuivrait que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables peut renfermer une fonction arbitraire de deux quantités, tandis que dans les cas que nous avons examinés, nous n'avons jamais trouvé que des fonctions arbitraires d'une seule quantité ; il est d'ailleurs fa-

cile de se convaincre qu'il est impossible de faire disparaître d'une équation à trois variables, une fonction arbitraire de deux quantités par le moyen de ses deux équations dérivées.

Cette difficulté, je l'avoue, m'a long tems tourmenté ; enfin je suis parvenu à la résoudre par les considérations suivantes.

Je remarque d'abord que comme les trois équations

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c$$

satisfont par l'hypothèse aux trois équations du premier ordre

$$y' F'(p) - x' F'(q) = 0$$

$$z' F'(p) - x' \left(p F'(p) + q F'(q) \right) = 0$$

$$p' F'(p) + x' \left(F'(x) + p F'(z) \right) = 0$$

avec les constantes arbitraires a, b, c ; si on tire de ces mêmes équations

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c$$

les valeurs de x, y, z, en fonctions de p et qu'on les substitue dans les équations précédentes, elles deviendront nécessairement identiques; de sorte que par ces substitutions les premiers membres des équations, dont il s'agit, deviendront identiquement nuls, quelles que soient les valeurs de p, a, b, c.

Or le premier membre de la première étant multiplié par q et retranché du premier membre de la seconde des mêmes équations, donne

$$F'(p) \times (z' - p\,x' - q\,y').$$

Donc si dans la formule $z' - p\,x' - q\,y'$, on fait les mêmes substitutions des valeurs de x, y, z, en p, le résultat sera encore identiquement nul.

A la place des variables x, y, z, on peut, sans nuire à la généralité, introduire les quantités a, b, c, regardées comme variables, en conservant les mêmes expressions de x, y, z en p, a, b, c. Alors dans la formule $z' - p\,x' - q\,y'$, les termes provenant de la variabilité de p, se détruiront mutuellement, puisque ces mêmes expressions rendent cette formule nulle dans le cas où a, b, c sont constantes. Elle deviendra donc de la forme

$$A\,a' + B\,b' + C\,c'$$

dans laquelle A, B, C, seront des fonctions de p, a, b, c.

Donc l'équation

$$z' - p\,x' - q\,y' = 0$$

deviendra

$$A\,a' + B\,b' + C\,c' = 0$$

et la condition qui doit la rendre susceptible d'une équation primitive sera, par ce que nous avons trouvé

$$c = \varphi(a, b),$$

puisque la substitution des valeurs de x, y, z, en p, a, b, c, donne

$$P = a, \quad Q = b, \quad R = c,$$

d'où ces valeurs sont supposées tirées.

Or, en prenant les fonctions dérivées, on a

$$c' = a' \varphi'(a) + b' \varphi'(b).$$

Donc faisant ces substitutions, l'équation,

$$\left(A + C \varphi'(a) \right) a' + \left(B + C \varphi'(b) \right) b' = 0$$

aura nécessairement une équation primitive, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la variable p disparaîtra d'elle-même de l'équation, puisque sa fonction dérivée p', a déjà disparu.

Alors l'équation sera entre les deux seules variables a et b; et aura toujours une équation primitive, par laquelle b deviendra fonction de a seul; et cette fonction sera arbitraire, à cause de la fonction arbitraire $\varphi(a, b)$.

Ainsi les deux quantités b et c, seront nécessairement, l'une et l'autre, fonction de a seul; mais il faudra qu'elles satisfassent à l'équation

$$A a' + B b' + C c' = 0.$$

Soit donc $b = \psi a$, $c = \varphi a$, en les substituant dans cette équation, on aura

$$A + B\psi' a + C\varphi' a = 0$$

ce qui donne une relation entre les deux fonctions φa et ψa, et il en restera une d'arbitraire.

Maintenant, si on remet pour a, b, c, leurs valeurs P, Q, R, on aura pour l'équation primitive cherchée le système des deux équations

$$Q = \psi P, \quad R = \varphi P$$

d'où en éliminant p, on aura une équation en x, y, z, avec une fonction arbitraire.

Telle est la solution directe et complette du problême, mais nous verrons qu'on peut la simplifier dans plusieurs cas.

Prenons pour exemple l'équation du premier ordre

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right) \times \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

On aura ici

$$F(x, y, z, p, q) = z - pq = 0$$

donc

$$F'(x) = 0, \quad F'(y) = 0, \quad F'(z) = 1$$

$$F'(p) = -q, \quad F'(q) = -p.$$

Et les trois équations du premier ordre en x, y, z, p, deviendront

$$-q y' + p x' = 0$$

$$-qz' + 2pqx' = 0$$

$$-qp' + px' = 0$$

Or l'équation

$$z = p\ q, \text{ donne} \qquad q = \frac{z}{p};$$

donc les trois équations dont il s'agit deviendront

$$z\,y' - p^2\,x' = 0$$

$$z' - 2\,p\,x' = 0$$

$$zp' - 2\,p\,x' = 0$$

où l'on pourrait faire l'une des fonctions dérivées x', y', z', p', égale à l'unité.

La première et la dernière donnent $y' = p'$; d'où l'on tire l'équation primitive

$$y = p + a$$

a étant une constante arbitraire.

Ensuite la seconde et la troisième donnent

$$pz' = 2\,z\,p',$$

savoir

$$\frac{z'}{z} = \frac{2\,p'}{p}$$

les fonctions primitives logarithmiques sont

$$l.\,z = l.\,p^2 + l.\,b;$$

d'où

d'où l'on tire

$$z = b\ p^2$$

b étant une autre constante arbitraire.

Enfin si dans la première on substitue p' pour y', et $b\,p^2$ pour z, on a, en divisant par p^2, $b\,p' - x' = 0$, d'où l'on a, en prenant les fonctions primitives

$$x = b\,p + c,$$

c étant la troisième constante arbitraire.

Ainsi on aura, en dégageant les valeurs de ces constantes,

$$a = y - p = P$$

$$b = \frac{z}{p^2} = Q$$

$$c = x - \frac{z}{p} = R.$$

Maintenant si dans l'équation

$$z' - p\,x' - q\,y' = 0$$

on substitue pour q la valeur $\frac{z}{p}$, elle devient

$$z' - p\,x' - \frac{z\,y'}{p} = 0.$$

Et si à la place de x, y, z, on y met les expressions trouvées ci-dessus en p, a, b, c, en regardant les quantités a, b, c, comme variables, on a la transformée

$$p^2\,b' + 2\,b\,pp' - p^2\,b' - b\,pp'$$
$$- p\,c' - b\,pp' - b\,p\,a' = 0$$

qui en effaçant ce qui se détruit et divisant ensuite par p, se réduit à

$$c' + b a' = 0$$

Donc faisant

$$b = \psi a, \quad c = \varphi a$$

on aura

$$\varphi a' + \psi a = 0;$$

ce qui donne $\psi a = -\varphi' a$.

Ainsi on aura le système de ces deux équations

$$R = \varphi P, \quad Q = -\varphi' P.$$

Savoir

$$x - \frac{z}{p} = \varphi (y - p), \quad \frac{z}{p^2} = -\varphi' (y - p)$$

d'où il faudra éliminer p ; et la fonction $\varphi (y - p)$ demeurera arbitraire.

Nous ferons ici une remarque importante. Lorsqu'on a trouvé deux équations primitives renfermant deux constantes arbitraires comme $y = p + a$, et $z = b p^2$, on pourrait croire qu'en éliminant p, on aurait une équation primitive avec deux constantes arbitraires qui serait par conséquent l'équation primitive complette de la proposée, et d'où l'on pourrait ensuite tirer l'équation primitive générale avec une fonction arbitraire.

On aurait de cette manière l'équation

$$z = b (y - a)^2$$

Mais il est facile de se convaincre qu'elle ne satisfait pas à la proposée

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right) \times \left(\frac{z'}{y'}\right)$$

car elle donne $\left(\frac{z'}{x'}\right) = 0$.

Il en serait de même, si l'on employait, pour chasser p, la seconde et la troisième équation ; on aurait alors

$$c = x - \sqrt{(bz)},$$

savoir

$$z = \frac{(x-c)^2}{b}$$

ce qui donnerait

$$\left(\frac{z'}{y'}\right) = 0.$$

Mais si on employait la première et la dernière, on aurait par l'élimination de p,

$$c = x - \frac{z}{y-a},$$

d'où l'on tire

$$z = (x-c)(y-a)$$

cette expression donne

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = y - a, \left(\frac{z'}{y'}\right) = x - c;$$

valeurs qui satisfont à la proposée.

La raison de cette espèce de bizarrerie se trouve dans l'équation donnée plus haut, $c' + b a' = o$.

Elle fait voir que les deux quantités a et c peuvent être constantes ensemble ; que par conséquent les deux équations $P = a$, et $R = c$, ont lieu à la fois ; de sorte qu'en éliminant p, on a une équation en x, y, z, et les deux constantes arbitraires a, c, qui sera par conséquent l'équation primitive complette de la proposée. Mais l'équation ne serait pas satisfaite par la simple supposition de a et b, ou de b et c, constantes ensemble ; d'où il suit que les deux équations

$P = a$ et $Q = b$, où, $Q = b$ et $R = c$

prises ensemble ne satisfont pas à la proposée.

Au reste, on peut trouver l'équation primitive complette, au moyen d'une seule de ces équations ; car elle donne une valeur de p en x, y, z, et une constante arbitraire ; et comme cette valeur satisfait à l'équation du premier ordre en x, y, z et p, elle rendra l'équation $z' - px' - qy' = o$, susceptible d'une équation primitive ; ainsi il n'y aura qu'à chercher cette équation en y ajoutant une constante arbitraire, et l'on aura l'équation primitive complette avec les deux constantes.

Ou bien on tirera de l'équation trouvée la valeur de p en x, y, z, et comme $p = \left(\frac{z'}{x'}\right)$ on cherchera l'équation primitive, en ne regardant que z et x comme

variables. Cette équation pourra alors renfermer une fonction arbitraire de y qu'on déterminera aisément par l'équation proposée ; et comme celle-ci est du premier ordre, la fonction de y renfermera au moins une constante arbitraire ; de sorte qu'on aura, de nouveau, une équation primitive complète avec les deux constantes.

Prenons dans l'exemple précédent la première équation $P = a$, savoir $y - p = a$.

Elle donne $p = y - a$, et comme on a $q = \frac{z}{p}$, on aura

$$q = \frac{z}{y - a.}$$

Ces deux valeurs étant substituées dans l'équation

$$z' - p\,x' - q\,y' = 0$$

donnent

$$z' - (y - a)\,x' - \frac{z\,y'}{y - a} = 0$$

équation, qui étant divisée par $y - a$, a pour équation primitive

$$\frac{z}{y - a} - x + c = 0$$

où c est la nouvelle constante arbitraire.

Or cette équation est la même que nous avons trouvée ci-dessus par l'élimination de p.

La même équation $p = y - a$ devient, en subs-

tituant pour p sa valeur, $\left(\frac{z'}{x'}\right)$,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = y - a$$

Comme il n'y a ici que la fonction dérivée de z relativement à x, on peut ôter les parenthèses et mettre l'équation sous la forme

$$z' = (y - a)\, x'$$

dont l'équation primitive en regardant y comme constante, est

$$z = (y - a)\,(x - Y)$$

Y étant une fonction quelconque de y.

Cette valeur donne, en prenant les fonctions dérivées par rapport à x et y,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = y - a$$

$$\left(\frac{z'}{y'}\right) = x - Y - (y - a)\, Y'.$$

Substituant ces expressions dans la proposée

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right) \times \left(\frac{z'}{y'}\right),$$

on a

$(y - a)\,(x - Y) = (y - a)\,(x - Y) + (y - a)^2\, Y'$;

d'où l'on tire $Y' = 0$; et par conséquent $Y = c$, en prenant c pour une constante arbitraire.

Ainsi l'équation primitive devient, comme ci-dessus,

$$z = (y - a)\ (x - c).$$

Ayant cette équation primitive complette pour en tirer l'équation primitive générale, on fera $c = \varphi a$, et on prendra la dérivée par rapport à a seul; on aura ainsi le système des deux équations

$$z = (y - a)\ (x - \varphi a)$$

$$x - \varphi a + (y - a)\,\varphi' a = 0$$

d'où il faudra éliminer a.

Pour les comparer aux équations trouvées ci-dessus par la méthode générale, il n'y a qu'à les mettre sous la forme

$$x - \frac{z}{y - a} = \varphi a$$

$$\frac{z}{(y - a)^2} = \varphi' a$$

Comme la quantité a doit être éliminée, on peut mettre à sa place une quantité quelconque. Si on y met sa valeur $y - p$, on a les mêmes équations déjà trouvées, d'où il faut ensuite éliminer p.

La Théorie des équations à plusieurs variables des ordres supérieurs au premier, est encore très-imparfaite.

Lorsque ces équations, admettent une équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, on peut les regarder comme provenant d'une équation primitive complette de ce dernier ordre avec deux

constantes arbitraires, ainsi que nous l'avons démontré pour les équations du premier ordre, et lors qu'on connaît d'une manière quelconque cette équation primitive, on peut par les mêmes principes en tirer les équations primitives, générales et singulières; mais on sait que dès le second ordre, il y a une infinité d'équations qui ne sont point susceptibles d'une équation primitive du premier ordre, et qui admettent néanmoins une équation primitive absolue sans fonctions dérivées. Nous n'entrerons point ici dans ce détail qui nous menerait trop loin, et nous renvoyons pour ce qui regarde les équations de ce genre, aux traités connus du calcul différentiel.

L'application du calcul des fonctions à la Géométrie et à la Mécanique, pourra faire le sujet d'autres leçons; on en trouve les principes dans la seconde partie de la *Théorie des fonctions analitiques.*

ADDITION

A la leçon dix-neuvième.

Pour confirmer ce que nous avons avancé au commencement de cette leçon (*p.* 397) sur le passage des différences finies aux différentielles, nous ajouterons que comme ce passage consiste réellement dans un changement de fonction, l'analise indique et effectue ce changement par des expressions, qui deviennent alors zero divisé par zero.

Considérons en effet la différentiellle $d.\ fx$; suivant les principes rigoureux du calcul des différences, on a

$$d.\ fx = f(x + dx) - fx;$$

et par conséquent

$$\frac{d.\ fx}{dx} = \frac{f(x+dx) - fx}{dx}$$

Cette valeur de $\frac{d.\ fx}{dx}$ devient $\frac{0}{0}$ lorsque $dx = 0$; pour savoir ce qu'elle doit être dans ce cas-là, on suivra la règle exposée à la fin de la leçon VIII (*p.* 97), et que nous avons déduite de principes indépendans du calcul différentiel.

On prendra donc les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, relatives à la variable dx, et on y fera ensuite $dx = 0$.

On aura ainsi

$f'(x+dx)$ et (faisant $dx=0$) $f'x$

pour la valeur de $\frac{d.fx}{dx}$, lorsque $dx=0$.

Cette valeur est, comme l'on voit, la même que celle que donne le calcul différentiel ; comme nous l'avons observé à la fin de la leçon II (*p.* 24).

Si l'on considère de même les différences secondes, on a d'abord rigoureusement

$$d^2.fx = f(x+2dx) - 2f(x+dx) + fx,$$

donc

$$\frac{d^2.fx}{dx^2} = \frac{f(x+2dx) - 2f(x+dx) + fx}{dx^2}.$$

En faisant $dx=0$, cette valeur de $\frac{d^2.fx}{dx^2}$ devient $\frac{0}{0}$; on prendra donc alors les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relativement à la variable dx, ce qui donnera

$$\frac{f'(x+2dx) - f'(x+dx)}{dx}.$$

Cette expression devient de nouveau $\frac{0}{0}$ lorsqu'on y fait $dx=0$; c'est pourquoi il faudra prendre encore les fonctions dérivées du numerateur et du

dénominateur relativement à la même variable dx ; on aura

$$2f''(x+2dx) - f''(x+dx).$$

En faisant ici $dx = 0$, on a enfin $f''x$ pour la valeur de $\frac{d^2 . fx}{dx^2}$ lorsque $dx = 0$.

C'est en effet la valeur de la différentielle seconde de fx, divisée par dx^2.

On doit conclure de là, en général, que les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ etc, employées dans le calcul différentiel, ne peuvent être prises que pour des symboles des fonctions dérivées y', y'' etc.

Nous avons observé à la fin de la même leçon XIX, que Tailor n'était parvenu à la formule qui porte son nom que d'une manière peu exacte. On peut, par les principes précédens, donner à son procédé toute la rigueur que l'analyse peut demander.

Si dans la formule générale d'interpolation, (*p.* 421) on fait $y = fx$, elle devient

$$f(x+\omega) = fx + \omega \frac{\Delta . fx}{i} + \frac{\omega(\omega-i)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 . fx}{i^2} + \frac{\omega(\omega-i)(\omega-2i)}{2.3} \frac{\Delta^3 . fx}{i^3} + \text{etc.}$$

dans laquelle

$$\Delta . f x = f (x + i) - f x$$

$$\Delta^2 . f x = f (x + 2 i) - 2 f (x + i) + f x ,$$

etc.

Cette formule est générale quelque soit i, mais en faisant $i = 0$, les valeurs des expressions

$$\frac{\Delta . f x}{i}, \quad \frac{\Delta^2 . f x}{i^2} \quad \text{etc.}$$

deviennent $\frac{0}{0}$.

Or ces expressions sont les mêmes que celles que nous avons considérées ci-dessus, en changeant Δ en d, et i en $d x$.

Ainsi elles deviennent $f' x$, $f'' x$, etc, dans le cas de $i = 0$.

On a donc alors

$$f (x + \omega) = f x + \omega f' x + \frac{\omega^2}{2} f'' x + \text{etc} ,$$

comme nous l'avons trouvé, dans la leçon II, d'une manière rigoureuse et directe.

On peut conclure de ce que nous venons d'exposer que ceux qui, d'après Euler, regardent les différentielles comme de véritables zero, et par conséquent leur rapport comme celui de zero à zero, sont dans toute la rigueur de l'analise ; parce qu'une fonction

qui satisfait en général aux conditions d'une question, ne saurait changer de forme pour un cas particulier qu'en passant par l'état de $\frac{0}{0}$; comme on peut le prouver par plusieurs exemples.

On sait que la somme de n termes de la progression géométrique

$$1 + a + a^2 + a^3 + \text{etc},$$

est exprimée par $\frac{1 - a^n}{1 - a}$.

En regardant cette expression comme une fonction de n, on voit que cette fonction est de la forme exponentielle.

Cependant, dans le cas de $a = 1$ la série devient $1 + 1 + 1 + \text{etc}$, et la somme de n termes est n.

Ainsi dans ce cas il faut que la fonction exponentielle change de forme et devienne une simple fonction algébrique; ce qui ne peut se faire que par une espèce de saut, que l'analise indique alors par l'expression $\frac{0}{0}$.

En effet en faisant $a = 1$, la formule $\frac{1 - a^n}{1 - a}$ devient $\frac{0}{0}$; et pour en trouver la valeur, il faut prendre les fonctions dérivées du numérateur et du déno-

minateur relativement à la variable a, ce qui donne $n\,a^{n-1}$, et par conséquent n, en faisant $a = 1$.

La fonction primitive de x^n ou l'intégrale de $x^n\,dx$ est en général $\frac{x^{n+1}}{n+1}$;

Pour qu'elle commence au point où $x = a$, il en faut retrancher la constante $\frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Et l'on a alors la fonction

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Cette fonction de x est toujours algébrique, mais dans le cas où $n = -1$, elle devient $\frac{0}{0}$; ce qui indique qu'elle doit alors changer de forme.

Pour trouver la nouvelle fonction, on prendra les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur de l'expression précédente relativement à la variable n, l'on aura ainsi, par les formules données dans la leçon IV,

$$x^{n+1}\,l\,x - a^{n+1}\,l\,a.$$

En faisant $n = -1$, on a $l\,x - l\,a$ ou $l\,\frac{x}{a}$ pour la fonction primitive de $\frac{1}{x}$ comme on l'a trouvé dans

la même leçon par d'autres principes.

La série

$$\cos x^{n-1} \sin x - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3} \times \cos x^{n-3} \sin x^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5} \times \cos x^{n-5} \sin x^5$$

— etc.

est représentée généralement par la fonction en *sinus*, $\frac{\sin n x}{n}$, comme on le voit par la formule rapportée à la fin de la même leçon XIX.

Cette fonction devient $\frac{0}{0}$ lorsque $n = 0$, auquel cas la série se réduit à

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x^3}{3 \cos x^3} + \frac{\sin x^5}{5 \cos x^5} - \text{etc.}$$

Cela indique que la fonction doit changer de forme dans ce cas; en effet si on prend, suivant la règle, les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relativement à la variable n, la fonction devient $x \cos n x$, et se réduit à la fonction circulaire x en faisant $n = 0$.

C'est, comme l'on sait, la valeur rigoureuse de la série

$$tang.x - \frac{1}{3} tang.x^3 + \frac{1}{5} tang.x^5$$

— etc.

On voit clairement, par ces differens exemples, qu'il serait aisé de multiplier, s'il était nécessaire, que l'expression $\frac{0}{0}$ est toujours le simptôme d'un changement de fonction; ce qu'il me semble qu'on n'avait pas encore remarqué.

ERRATA

Page 16 ligne 12, au lieu de $fx + ip + iq + ir + \text{etc}$,
lisez $fx + ip + i^2 q + i^3 r + \text{etc}$,

— 49 lig. 2, au lieu de $\left(\frac{p+q+r+\text{etc},}{1.2.3..m}\right)^m$
lisez $\frac{(p+q+r+\text{etc},)^m}{1.2.3....m}$

— 80 lig. 11 au lieu de $y = a$, lisez $y = a^x$

— 88 ligne 7, comptée d'en bas, au lieu de x,
lisez n.

— 119 ligne 4, au lieu de $\frac{z^{\mu\alpha}}{2.3...\mu} f^{\mu}$
lisez $\frac{z^{\mu\alpha}}{2.3..\mu} f^{\mu} q$

— 148 ligne 4, au lieu de (A). (B), (D), (F).
lisez (A), (B), (H), (K).

— 153 ligne 6, comptée d'en bas, au lieu de
$(p + \sqrt{(p^2 - 1)})^m$ lisez $(p + \sqrt{(p^2 - 1)})^{-m}$.

— 218 lig. 13, comptée d'en bas, au lieu de x, y et y'
lisez x, y, y' et y''.

— 348 ligne pénult, au lieu de $y'(y'')$, lisez $\Psi'(y'')$.

— 376 ligne 7, comptée d'en bas, au lieu de
$\Phi\left(x + y y' \sqrt{y\,(1 + y'^2)}\right) = 0$,
lisez $\Phi\left(x + y y', y\sqrt{(1 + y'^2)}\right) = 0$.

— 388 ligne première, au lieu de $\frac{k}{+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2}$

lisez $\frac{k}{k+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2}$

— 400, ligne 6, comptée d'en bas, au lieu de 2 *a i*, lisez *a i*.

ligne 5, au lieu de $\Delta' y$, lisez Δy.

— 402 ligne 4. comptée d'en bas, lisez

$(a' + a + x + i)(a' - a) = 0$.

— 456, ligne 4, comptée d'en bas, au lieu de $\left(\frac{z''}{x'}\right)$,

lisez $\left(\frac{z''}{x''}\right)$

— 504 lig. 7, comptée d'en bas, au lieu de *celle de* p, lisez *celle de* q.

TABLE
DES
MATIÈRES.

MATHÉMATIQUES.

SUR LE CALCUL DES FONCTIONS.

LEÇON PREMIÈRE.

page.

Sur l'objet du calcul des fonctions, et sur les fonctions en général. 7

LEÇON SECONDE.

Développement d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Loi générale de ce développement. Origine des fonctions dérivées. Différens ordres de ces fonctions. Leur notation. 16

LEÇON TROISIÈME.

Fonctions dérivées des puissances. Développement d'une puissance quelconque d'un binome. 25

LEÇON QUATRIÈME.

Fonctions dérivées des quantités exponentielles et logarithmiques. Développement de ces quantités en séries. 35

LEÇON CINQUIÈME

Fonctions dérivées des sinus et cosinus d'angles, et des angles par les sinus et cosinus. Développement de ces quantités en séries. [illegible]

LEÇON SIXIÈME

Fonctions dérivées des quantités composées de différentes fonctions d'une même variable. Ou dépendantes de ces fonctions par des équations données. 60

LEÇON SEPTIÈME

Sur la manière de rapporter les fonctions dérivées à différentes variables. 76

LEÇON HUITIÈME.

Du développement des fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Analise de ces cas. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent à la fois. 84

LEÇON NEUVIÈME.

De la manière d'avoir les limites du développement d'une fonction, lors qu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé de termes. Cas dans lesquels les principes du calcul différentiel sont en défaut. 106

LEÇON DIXIÈME.

Des équations dérivées, et de leur usage pour la transformation des fonctions. Analise des sections angulaires. 128

LEÇON ONZIÈME.

Suite de l'analise des sections angulaires. 150

LEÇON DOUZIÈME.

Théorie générale des équations dérivées, et des constantes arbitraires. 184

LEÇON TREIZIÈME.

(*Continuation de la leçon précédente.*)

Théorie des multiplicateurs des équations dérivées. 204

LEÇON QUATORZIÈME.

Des équations de condition, par lesquelles on peut reconnaître si une fonction, d'un ordre quelconque, de plusieurs variables, est une fonction dérivée exacte. 218

LEÇON QUINZIÈME.

Des valeurs singulières qui satisfont aux équations dérivées, et qui ne sont pas comprises dans les équations primitives. Théorie des équations primitives singulières. 258

LEÇON SEIZIÈME.

Comment l'équation primitive singulière résulte de l'équation dérivée. 292

LEÇON DIX-SEPTIÈME.

Equations dérivées qui ont des équations primitives singulières données. Analise d'une classe d'é-

LEÇON CINQUIÈME. [illegible]

Fonctions dérivées des sinus et cosinus des angles par les sinus et cosinus [illegible] TIÈME. la Théorie de [illegible] ment de ces quantités en séries [illegible]

LEÇON [illegible] NEUVIÈME.

Fonctions dérivées [illegible] équations aux différences différentes fonctions [illegible] pendantes de [illegible]

LEÇON VINGTIÈME.

Sur [illegible] ations de deux ou plusieurs variables; de [illegible] fonctions dérivées. Notation et formation de [illegible] fonctions. Équations dérivées à plusieurs variables. Théorie générale de ces équations. Méthodes pour trouver les équations primitives des équations du premier ordre. [illegible]

ADDITION à la Leçon dix-neuvième. [illegible]

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.